ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರವೇಶಿಕೆ

(ಭಾಗ–1)

ಎಚ್ ಎಸ್ ಕೃಷ್ಣಸ್ವಾಮಿ
ಎಮ್ ಆರ್ ಕೃಷ್ಣಮೂರ್ತಿ
ಎಚ್ ಎಸ್ ಶಿವಕುಮಾರ್

1976

ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ವಿಭಾಗ

ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ, ಬೆಂಗಳೂರು-24

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರವೇಶಿಕೆ

(ಭಾಗ 1)

(ಬೀಜಗಣಿತ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ, ಕ್ಷೇತ್ರಗಣಿತ)

ಎಚ್. ಎಸ್. ಕೃಷ್ಣಸ್ವಾಮಿ
ಎಮ್. ಆರ್. ಕೃಷ್ಣಮೂರ್ತಿ
ಎಚ್. ಎಸ್. ಶಿವಕುಮಾರ್

1976

ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ವಿಭಾಗ
ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ, ಬೆಂಗಳೂರು 560024

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರವೇಶಿಕೆ—ಭಾಗ 1 (ಬೀಜಗಣಿತ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ, ಕ್ಷೇತ್ರಗಣಿತ)—(ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ವಿಭಾಗದಿಂದ ಸಿದ್ಧಗೊಂಡು ಸಂವಹನ ಸಮಿತಿ ಪ್ರಕಾಶಿತು ಪ್ರಥಮ ಮುದ್ರಣ 1976, ಪ್ರತಿ 1000, ಪುಟ viii + 220

ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ ರೂ. 20 ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ ರೂ. 24

ಪ್ರಧಾನ ಸಂಪಾದನೆ

ವೀ. ಚ. ಹಿತ್ತಲಮನಿ,

ಕನ್ನಡ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು

ಸಹ ಸಂಪಾದನೆ

ಸಿ. ಕೆ. ಕುಮುದಿನಿ,

ಸಂಶೋಧನ ಸಹಾಯಕರು

ತಾಂತ್ರಿಕ ಪರಿಶೀಲನೆ

ಡಾ॥ ಎಸ್. ರುದ್ರಯ್ಯ,

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು, ಬೆಂಗಳೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ

ಪರಿಷ್ಕೃತ ಬೆಲೆ

ಸಾದಾಪ್ರತಿ ರೂ. 25-00

ಕ್ಯಾಲಿಕೊಪ್ರತಿ ರೂ. 30-00

ಮುದ್ರಕರು

ಬೆಂಗಳೂರು ಪ್ರೆಸ್, ಮೈಸೂರು ರೋಡು, ಬೆಂಗಳೂರು—560018

ಮುನ್ನುಡಿ

ಇಂದಿನ ವಿಶ್ವದಲ್ಲಿನ ನಾಗಾಲೋಟದ ಜನಸಂಖ್ಯೆ ತಂದೊಡ್ಡಿದ ಹಲವಾರು ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಕೃಷಿ ಉತ್ಪಾದನೆಯ ಹೆಚ್ಚಳವೇ ಬಹುಮಟ್ಟಿಗೆ ಪರಿಹಾರ ಒದಗಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ. ಕೃಷಿಉತ್ಪಾದನೆಯ ಹೆಚ್ಚಳವು ಕೃಷಿ ಸಂಶೋಧನೆಗಳ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನಳವಡಿಸುವಿಕೆಯನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿದೆ. ಕಳೆದ ಒಂದು ದಶಕದಲ್ಲಿ ಕೃಷಿ ಸಂಶೋಧನೆಯು ನಾನಾಮುಖವಾಗಿ ಬೆಳೆದಿದೆ. ಅದರ ಪ್ರಯೋಜನವನ್ನು ಕೆಲವು ರೈತರು ಪಡೆದಿದ್ದಾರೆ. ಅವರಲ್ಲಿ ಕೆಲವರು ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ, ಜಾಗತಿಕ ಗರಿಷ್ಠ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ನಾವು ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೆಂಬ ಭರವಸೆಯ ದೃಷ್ಟಾಂತವೆನಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಈ ಅಳವಡಿಕೆ ಹಾಗೂ ಸಾಧನೆಗಳು ಕೆಲವರ ಸ್ವತ್ತಾಗಿ ಉಳಿಯದೆ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಬೇಕು. ಆಗ ರಾಷ್ಟ್ರದಲ್ಲಿ ನಿಜವಾದ ಕೃಷಿ ಪ್ರಗತಿ ಹಾಗೂ ಸಾಮಾಜಿಕ ಕಲ್ಯಾಣ ಮೂಡಿಬರುತ್ತದೆ. ಈ ಕಾರ್ಯಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ಕೃಷಿವಿಜ್ಞಾನ ಸಾಹಿತ್ಯ ರಚನೆಯು ಮಹತ್ವದ ಅಂಶವಾಗಿದೆ. ಈ ದೃಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೃಷಿವಿಜ್ಞಾನ ಪುಸ್ತಕಗಳು ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟವಾಗುತ್ತಿರುವುದು ಔಚಿತ್ಯಪೂರ್ಣವಾಗಿದೆ.

ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯಾನಂತರದ ಅಭ್ಯುದಯದ ಹಲವಾರು ಯತ್ನಗಳಲ್ಲಿ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಭಾಷೆಗಳ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಯೂ ಒಂದು. ಹಿಂದೀ ಭಾಷೆಯೊಂದಿಗೇನೆ ಇತರ ಎಲ್ಲ ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಭಾಷೆಗಳ ಬೆಳವಣಿಗೆ ನಡೆಯಬೇಕೆಂದು ಸಂಸತ್ತು ನಿರ್ಧರಿಸಿದೆ. ಹಲವಾರು ಭಾಷೆಗಳು ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ನಮ್ಮ ರಾಷ್ಟ್ರದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ಭಾಷೆಗಳೂ ಸಮತೂಕವಾಗಿ ಬೆಳೆದು ಬಂದಾಗಲೇ ರಾಷ್ಟ್ರದ ಸಮಗ್ರತೆ ಬೆಳೆದುಬರುತ್ತದೆ. ಈ ಭಾಷೆಗಳು ಸಾಕಷ್ಟು ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಹೊಂದಿದಾಗ ಶಿಕ್ಷಣಮಾಧ್ಯಮಗಳಾಗಲು ಸಮರ್ಥವಾಗುತ್ತವೆ. ನಾಡಿನ ಭಾಷೆಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಶಿಕ್ಷಣಮಾಧ್ಯಮಗಳಾಗುವಂತೆ ಬಲಗೊಳಿಸುವ ಹೊಣೆ ವಿವಿಧ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯಗಳದ್ದು. ಅದಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಭಾಷೆಗಳು ಕೃಷಿ ಶಿಕ್ಷಣಮಾಧ್ಯಮಗಳಾಗುವಂತೆ ಸಿದ್ಧತೆಗಳನ್ನು . ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದ್ದು ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯಗಳ ಕೆಲಸವಾಗಿದೆ. ನಮ್ಮ ಕೃಷಿವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯವು ಈ ಕಾರ್ಯಸಾಧನೆಗೋಸುಗ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಕೃಷಿ ಸಾಹಿತ್ಯ ನಿರ್ಮಾಣ ಕೈಗೆತ್ತಿಕೊಂಡಿದೆ. ಇಷ್ಟುದಿನ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿಯೇ ಶಿಕ್ಷಣ ಪಡೆದು, ಬಳಿಕ ನಡೆಸಿದ ಶಿಕ್ಷಕ ಹಾಗೂ ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳಿಗೆ ಒಮ್ಮೆಲೇ ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಭಾಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಗ್ರಂಥರಚನೆ ಮಾಡುವುದು ಸುಲಭ ಕಾರ್ಯವೇನಲ್ಲ. ಈ ಕೆಲಸ ಭರದಿಂದ ನಡೆದಷ್ಟು ಕೃಷಿ ಮುನ್ನಡೆಯು ತ್ವರಿತವಾಗಿ ನಡೆಯುವುದು.

ಉಪಯುಕ್ತ ಸಂಶೋಧನಾಧಾರಿತ ಆಳ ಅಭ್ಯಾಸದ ಫಲವಾಗಿ ಸೃಷ್ಟಿಗೊಂಡ ಕೃಷಿವಿಜ್ಞಾನ ಗ್ರಂಥಗಳು ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದ ಕೃಷಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಹಾಗೂ ಕೃಷಿಕರಿಗೆ ಅಮೂಲ್ಯ ಕೊಡುಗೆಗಳಾಗುವುದರಲ್ಲಿ ಸಂದೇಹವಿಲ್ಲ. ಈ ಕಾರ್ಯ ಮಿಂಚಿನ ವೇಗದಿಂದ ನಡೆಯಲೆಂದು ನಾನು ಹಾರೈಸುತ್ತೇನೆ.

ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ, ಬೆಂಗಳೂರು
ದಿನಾಂಕ 15-3-1976

ಹ. ರಾ. ಅರಕೇರಿ
ಉಪಕುಲಪತಿಗಳು

ಸಂಪಾದಕರ ಮಾತು

ಅನ್ವಯಿಕ ವಿಜ್ಞಾನ ಶಾಸ್ತ್ರಾಧ್ಯಯನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ಮೂಲ ವಿಜ್ಞಾನ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳ ತಿಳಿವಳಿಕೆಯ ಅವಶ್ಯಕತೆಯಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಅಗತ್ಯತೆಯ ಪೂರೈಕೆಗಾಗಿ ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ ಮೂಲವಿಜ್ಞಾನ ಹಾಗೂ ಮಾನವಿಕ ಶಿಕ್ಷಣ ನಿರ್ದೇಶನಾಲಯ ವನ್ನು ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೊಳಿಸಿದೆ.

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಎಲ್ಲ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳಿಗೂ ಮೂಲಭೂತಶಾಸ್ತ್ರ. ಆದಕಾರಣ ಕೃಷಿ ವಿಜ್ಞಾನಾಭ್ಯಾಸಿಗಳೂ ಅದನ್ನು ಕಲಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಇವರ ಉಪಯೋಗಕ್ಕಾಗಿ ರಚಿತವಾದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಪುಸ್ತಕದ ಮೊದಲನೆಯ ಭಾಗವಿದು. ಇದರಲ್ಲಿ ಬೀಜಗಣಿತ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ ಹಾಗೂ ಕ್ಷೇತ್ರಗಣಿತಗಳ ಚಿಂತನೆಯಿದೆ. ಈ ಗ್ರಂಥ ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗಲ್ಲದೆ ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿನ ಇತರ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯಗಳ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೂ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿದೆ.

ಇಂಗ್ಲಿಷಿನಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಾಸಮಾಡಿದ, ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಪಾಠಹೇಳಬಯಸುವ ಶಿಕ್ಷಕರಿಗೆ ನೆರವಾಗಲೆಂದು ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಕೋಶವನ್ನು ಪುಸ್ತಕದ ಕಡೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಸಂಕೇತ, ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತಾಕ್ಷರ, ಸೂತ್ರ, ಚಿಹ್ನೆ, ಸಂಖ್ಯೆ ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು ಇಂಗ್ಲಿಷಿನಲ್ಲಿರುವಂತೆಯೇ ಉಳಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. ಇವು ಅಂತರ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಬಳಕೆಗಳು.

ಈ ಪುಸ್ತಕದ ಪ್ರಯೋಜನವನ್ನು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಅಭ್ಯಾಸದ ಕನ್ನಡ ಮಾಧ್ಯಮದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಹಾಗೂ ಶಿಕ್ಷಕರು ಪಡೆಯುವರೆಂದು ನಂಬಲಾಗಿದೆ.

ಫಾಲ್ಗುಣ ಮಾಸ, ರಾಕ್ಷಸನಾಮ ಸಂ||
ಶಾಲೀವಾಹನ ಶಕ ೧೮೯೭
ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ವಿಭಾಗ
ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ
ಬೆಂಗಳೂರು–560024

ವಿ. ಚ. ಹಿತ್ತಲಮನಿ
ಸಂಪಾದಕರು
ಕನ್ನಡ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು ಹಾಗೂ
ಕನ್ನಡ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಸಮಿತಿ ಕಾರ್ಯದರ್ಶಿಗಳು

ಲೇಖಕರ ನುಡಿ

ಕೃಷಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಬರೆಯಲಾದ ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಬೀಜಗಣಿತ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ, ಕ್ಷೇತ್ರಗಣಿತ ವಿಷಯಗಳ ಅನುಸೂಚಿ **(Syllabus)**ಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಅರ್ಥವಾಗುವಂತೆ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಸೋದಾಹರಣವಾಗಿ ವಿವರಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಕೃಷಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆಂದೇ ಬರೆದಿದ್ದರೂ ಸಹ ಇದು ಈ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಹೊಸದಾಗಿ ಕಲಿಯುವವರಿಗೂ ನೆರವಾಗುತ್ತದೆಂದುನಂಬಿದ್ದೇವೆ.

ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಬರೆಯುವಾಗ ನಮ್ಮನ್ನು ಪ್ರೋತ್ಸಾಹಿಸಿದ ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ ಕನ್ನಡ ವಿಭಾಗದ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕ ಹಾಗೂ ಸಹಾಯಕ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರುಗಳಾದ ಶ್ರೀ ವೀ. ಚ. ಹಿತ್ತಲಮನಿ ಹಾಗೂ ಶ್ರೀ ಎಚ್. ಕೆ. ನರಸಿಂಹೇಗೌಡ, ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಪುಸ್ತಕದ ನಿರ್ಮಾಣ ಸಮಿತಿಯ ಅಧ್ಯಕ್ಷರಾದ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕ ಶ್ರೀ ಪಿ. ಸಿ. ಶ್ರೀಧರನ್ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯದಾಗಿ ಮೂಲ ವಿಜ್ಞಾನ ಹಾಗೂ ಮಾನವಿಕ ಶಾಸ್ತ್ರ ಶಿಕ್ಷಣ ನಿರ್ದೇಶಕರಾದ ಡಾ. ನಾರಾಯಣ್ ಇವರೆಲ್ಲರಿಗೂ ನಮ್ಮ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳು. ಇದೇ ರೀತಿ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿಯೂ ಪರೋಕ್ಷವಾಗಿಯೂ ನಮಗೆ ನೆರವಾದವರೆಲ್ಲರಿಗೂ ನಾವು ಕೃತಜ್ಞರಾಗಿದ್ದೇವೆ.

ಎಚ್. ಎಸ್. ಕೃಷ್ಣಸ್ವಾಮಿ,
ಎಮ್. ಆರ್. ಕೃಷ್ಣಮೂರ್ತಿ,
ಎಚ್. ಎಸ್. ಶಿವಕುಮಾರ್

ಪರಿವಿಡಿ

ಬೀಜಗಣಿತ ಪರಿಚಯ

ಅಧ್ಯಾಯ 1

ಗಣಸಿದ್ಧಾಂತ ಮತ್ತು ಘಾತ ನಿಯಮಗಳು
(THEORY OF SETS AND LAWS OF INDICIES)

(1) ಗಣಸಿದ್ಧಾಂತ (Set Theory)

1.1 ಗಣಗಳು

ವಸ್ತುಗಳ ಗುಂಪು ಅಥವಾ ಸಮೂಹವನ್ನು **ಗಣ** ಅಥವಾ **ಸಮೂಹ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳು, ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲ ಬಿಂದುಗಳು, ಒಂದು ಪುಸ್ತಕದ ಪುಟಗಳು, ಒಂದು ಮಾವಿನ ಮರದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳು, ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು, ಇತ್ಯಾದಿ.

ಇವುಗಳೆಲ್ಲಾ ಗಣಗಳು. ಇಲ್ಲಿ ಬಿಂದುಗಳು. ಪುಟಗಳು, ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣುಗಳು ಮತ್ತು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು **ಮೂಲವಸ್ತು** ಅಥವಾ **ಗಣಾಂಶ** (Element) ಗಳು ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ, a ಮತ್ತು b ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳಾಗಿರಲಿ. a ಯು A ಎಂಬ ಗಣದ ಗಣಾಂಶವಾಗಿದ್ದರೆ $a \in A$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು a ಗಣಾಂಶ A ಅಥವಾ aಯು Aಗೆ ಸೇರಿದೆ ಎಂದು ಓದಬೇಕು. a ಮತ್ತು b ಗಳೆರಡೂ A ಗಣದ ಗಣಾಂಶಗಳಾಗಿದ್ದರೆ $a, b \in A$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. a ಯು A ಗಣಕ್ಕೆ ಸೇರಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ $a \notin A$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಕೆಳಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಎಲ್ಲ ಗಣಿತಜ್ಞರೂ ಉಪಯೋಗಿಸುವಂತಹ ಸರ್ವಸಾಮಾನ್ಯವಾದ ಕೆಲವು ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ :

N = ಎಲ್ಲ ಪ್ರಾಕೃತಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $(1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$
(Natural numbers)

I = ಎಲ್ಲ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು $(\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$ (Integers).

Q = ಎಲ್ಲ ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $(\ldots -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, \ldots)$
(Rational numbers).

R = ಎಲ್ಲ ವಾಸ್ತವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $(\ldots -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}, 2, \ldots)$
(Real numbers).

ಉದಾಹರಣೆಗೆ. $2 \in N$ ಮತ್ತು $100 \in N$ ಏಕೆಂದರೆ 2 ಮತ್ತು 100 ಪ್ರಾಕೃತಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಆದರೆ, $\frac{1}{2}$, $-3 \notin N$ ಏಕೆಂದರೆ $\frac{1}{2}$ ಮತ್ತು -3 ಪ್ರಾಕೃತಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲ. ಗಣಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$A = \{a\}$ ಎಂಬ ಗಣವು a ಎಂಬ ಒಂದೇ ಗಣಾಂಶವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

$B = \{1, 2\}$ ಎಂಬ ಗಣವು 1 ಮತ್ತು 2 ಎಂಬ ಎರಡು ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ಎಂಬುದು 7 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವ ಎಲ್ಲಾ ಪ್ರಾಕೃತಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ.

$D = \{\ldots -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6 \ldots\}$ ಎಂಬುದು ಎಲ್ಲ ಸಮ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಗಣ.

$E = \{\ldots -9, -3, 0, 3, 9 \ldots\}$ ಎಂಬುದು 3 ನ್ನು ಅಪವರ್ತನವಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ.

C, D, E, ಗಣಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ವಿವರಿಸಬಹುದು.

$C = \{x : x \in N, x < 7\}$, $x \in N$ ಮತ್ತು $x < 7$ ಆಗಿರುವಂತಹ ಎಲ್ಲ x ಗಳ ಗಣ.

$D = \{x : x \in I,$ x ಸಮಸಂಖ್ಯೆ $\}$

$E = \{x : x \in I,$ x ನ ಅಪವರ್ತನ $3\}$

ಯಾವಾಗಲೂ $(a, b, c\ d, \ldots)$ ಗಳನ್ನು ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲೂ, (A, B, C, D, …) ಗಳನ್ನು ಗಣಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲೂ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

1.2 ಸಮಗಣಗಳು (Equal sets)

A ಮತ್ತು B ಎರಡು ಗಣಗಳಾಗಿರಲಿ. A ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ಗಣಾಂಶಗಳೆಲ್ಲವೂ B ಗಣದಲ್ಲೂ ಇದ್ದರೆ, ಆಗ ಆ ಗಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಿವೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಅವು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ $A = B$ ಎಂದೂ ಹಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ $A \neq B$ ಎಂದೂ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) A = { ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣು, ಬಾಳೆ ಹಣ್ಣು, ಸೀಬೆ ಹಣ್ಣು } ಮತ್ತು,
B = { ಬಾಳೆಹಣ್ಣು, ಮಾವಿನ ಹಣ್ಣು, ಸೀಬೆ ಹಣ್ಣು }

ಇಲ್ಲಿ A = B, ಏಕೆಂದರೆ A ಗಣದ ಗಣಾಂಶಗಳೆಲ್ಲಾ B ನಲ್ಲೂ ಇವೆ.

ಸೂಚನೆ: ಗಣಾಂಶಗಳು ಸ್ಥಳಾಂತರ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಗಣಗಳಲ್ಲೇನೂ ಬದಲಾವಣೆಗಳಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

(2) A = { 1, 2, 3 } ಮತ್ತು B = { 1, 1, 3, 3, 2, 2 } ಆಗಿದ್ದರೆ ಆಗಲೂ ಕೂಡ A = B. ಅಂದರೆ, ಗಣಾಂಶಗಳು ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಯಾದರೂ ಗಣಗಳಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆಗಳೇನೂ ಆಗುವುದಿಲ್ಲ.

(3) A = { 1, 2 }, B = { 1, 1, 2, 3 } ಆದರೆ $A \neq B$. ಏಕೆಂದರೆ, B ನಲ್ಲಿರುವ ಗಣಾಂಶ 3, A ನಲ್ಲಿಲ್ಲ.

..ಸಮಗಣಗಳ ಮೂರು ಮುಖ್ಯಗುಣಗಳು

(1) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣ A ಗೆ, A = A ಎಂಬುದು ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು **ಪ್ರತಿಫಲನ ಗುಣ** (Reflexive property) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

(2) A = B ಆದರೆ, B = A ಆಗಿರುವ ಈ ಗುಣವನ್ನು **ಸಮಾಂಗ ಗುಣ** (Symmetric property) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

(3) A = B ಆಗಿದ್ದು B = C ಆಗಿದ್ದರೆ, A = C ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು **ವಾಹಕ ಗುಣ** (Transitive property) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

1.3 ಉಪಗಣಗಳು (Subsets)

A ಒಂದು ಗಣವಾಗಿರಲಿ. ಯಾವುದೇ ಗಣ B ಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣಾಂಶವೂ A ಯ ಗಣಾಂಶವಾಗಿದ್ದರೆ, B ಯನ್ನು A ನ **ಉಪಗಣವೆಂದು** ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು $B \subset A$ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, B = { 3 }, C = { 3, 4, 5 } ಮತ್ತು D = { 5, 6 }, ಈ ಗಣಗಳೆಲ್ಲವೂ A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } ಗಣದ ಉಪಗಣಗಳು. ಏಕೆಂದರೆ, B, C ಮತ್ತು D ಗಣಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣಾಂಶವೂ A ಗಣದಲ್ಲಿದೆ ಹಾಗೂ E = {1, 2, 3, 4, 5, 6} = A ಕೂಡ A ಗಣದ ಉಪಗಣ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಯಾವುದೇ ಗಣವು ಅದೇ ಗಣದ ಉಪಗಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈಗ, F = { 2, 3, 7 } ಎಂಬ ಗಣವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇದು A ಗಣದ ಉಪಗಣವಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, $7 \in F$ ಆದರೆ $7 \notin A$.

B ಯು A ನ ಉಪಗಣವಾಗಿರಲಿ. $B \neq A$ ಆದರೆ B ಯನ್ನು A ನ **ಸಹಜ ಉಪಗಣ** (Proper subset) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು $B \subset A$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, A ಗಣವು A ನ ಸಹಜ ಉಪಗಣವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. A ಯು A ನ **ಅಸಹಜ ಉಪಗಣ** (Improper subset) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. B ಯು A ನ ಸಹಜ ಮತ್ತು ಅಸಹಜ ಉಪಗಣವಾಗಬಹುದಾದ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು $B \subseteq A$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹಾಗೂ B ಯು A ನ ಉಪಗಣವಾಗಿರದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು $B \not\subset A$ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ $B \subset A, C \subset A, D \subset A, E \subseteq A, F \not\subset A$, ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಆದರೆ ಇವುಗಳನ್ನು ಸರಿಯಾದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸುವುದಾದರೆ, $B \subset A$, $C \subset A$, $D \subset A$, $E \subset A$ ಮತ್ತು $F \not\subset A$ ಎಂದು ಬರೆಯಬೇಕು. ಅಲ್ಲದೆ ಈ ಮುಂದಿನ ವಾಕ್ಯಗಳನ್ನು ಚೆನ್ನಾಗಿ ಗಮನದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

$\in$ ಎಂಬುದು ಗಣಾಂಶ ಮತ್ತು ಗಣದ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $\subset$ ಎಂಬುದು ಎರಡು ಗಣಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $1 \in A$ ಮತ್ತು $\{1\} \subset A$ ಎಂಬುದು ಸರಿ ಆದರೆ $1 \subset A$ ಮತ್ತು $\{1\} \in A$ ಎಂಬುದು ತಪ್ಪು.

1.4 ಪೂರಕಗಣ (Complementary set)

B ಗಣವು A ಗಣದ ಸಹಜ ಉಪಗಣವಾಗಿರಲಿ. ಅಂದರೆ A ಗಣದಲ್ಲಿ B ಗಣದ ಗಣಾಂಶಗಳ ಜೊತೆಗೆ ಅದರಲ್ಲಿಲ್ಲದ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಗಣಾಂಶಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಗಣಾಂಶಗಳು ಕೂಡ A ಯ ಸಹಜ ಉಪಗಣವಾದ ಮತ್ತೊಂದು ಗಣದ ಗಣಾಂಶಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಉಪಗಣವನ್ನು B′ ನಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದರೆ ಆಗ,

$$B' = \{ x : x \in A, x \notin B \}.$$

ಇಲ್ಲಿ B′ ಉಪಗಣವನ್ನು B ಉಪಗಣದ **ಪೂರಕಗಣ** ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{2. 3\}$

B ನ ಪೂರಕ ಗಣ $= B' = \{1, 4, 5, 6\}$

ಇಲ್ಲಿ B′ ಕೂಡ A ಗಣದ ಸಹಜ ಉಪಗಣವೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು ಹಾಗೂ B′ ನ ಗಣಾಂಶಗಳು B ನಲ್ಲಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದಲೇ B′, B ಗೆ ಪೂರಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

1.5 ಶೂನ್ಯಗಣ (Null set)

ಯಾವ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನೂ ಹೊಂದಿರದ ಗಣವನ್ನು **ಶೂನ್ಯಗಣವೆಂದು ಕರೆಯು**ತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ϕ ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

A ಎಂಬುದು ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಗಣವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ,

(i) ϕ ಯು A ಗಣದ ಉಪಗಣ.

(ii) ϕ ಎಂಬುದು A ಗಣದ ($A \neq \phi$) ಸಹಜ ಉಪಗಣ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $A = \{a, b, c\}$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ,

ϕ, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{c, a\}$ ಮತ್ತು $\{a, b, c\}$ ಗಳೆಲ್ಲವೂ A ಗಣದ ಉಪಗಣಗಳು ಹಾಗೂ $\{a, b, c\}$ ಮತ್ತು ϕ, $\{a, b\}$ ಮತ್ತು $\{c\}$, $\{a, c\}$ ಮತ್ತು $\{b\}$, $\{b, c\}$ ಮತ್ತು $\{a\}$ ಇವು ಪರಸ್ಪರ ಪೂರಕ ಗಣಗಳು.

1.6 ವಿಶ್ವಗಣ (Universal set)

ನಾವು ಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಎಲ್ಲ ಗಣಗಳನ್ನೂ U ಎಂಬ ಗಣದ ಉಪಗಣಗಳೆಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ U ಗಣವನ್ನು **ವಿಶ್ವಗಣವೆಂದು** ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹಾಗೂ $U \neq \phi$.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $(x - 1)\ (x + 2)\ (2x - 1) = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

$A = \{-2, \frac{1}{2}, 1\}$ ಎಂಬುದು ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಒಂದು ಗಣ. ಈ ಗಣವು Q (ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ) ಎಂಬ ವಿಶ್ವಗಣದ ಉಪಗಣ.

1.7 ಗಣಗಳ ಛೇದನ ಮತ್ತು ಸಂಯೋಗ (Intersection and Union of sets)

A ಮತ್ತು B ಗಣಗಳೆರಡಕ್ಕೂ ಸೇರಿರುವ ಗಣಾಂಶಗಳ ಗಣವನ್ನು A ಮತ್ತು B ಗಣಗಳ **ಛೇದನ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮತ್ತು ಇದನ್ನು $A \cap B$ ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ (A ಛೇದನ B ಎಂದು ಓದಬೇಕು).
ಅಂದರೆ,

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ ಮತ್ತು } x \in B\}$$

A ಗಣಕ್ಕೆ ಮಾತ್ರ ಸೇರಿರುವ ಅಥವಾ B ಗಣಕ್ಕೆ ಮಾತ್ರ ಸೇರಿರುವ ಅಥವಾ A ಮತ್ತು B ಗಣಗಳೆರಡಕ್ಕೂ ಸೇರಿರುವ ಗಣಾಂಶಗಳ ಗಣವನ್ನು A ಮತ್ತು B

ಗಣಗಳ **ಸಂಯೋಗವೆಂದು** ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು **A ∪ B** ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ (A ಸಂಯೋಗ B ಎಂದು ಓದಬೇಕು).

ಅಂದರೆ,

$$A \cup B = \{ x : x \in A \text{ ಅಥವಾ } x \in B \}$$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

(1) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ಮತ್ತು $B = \{3, 4, 5, 6\}$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

$A \cap B = \{3, 4\}$ ಮತ್ತು $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(2) $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{d, e, f\}$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ,

$A \cap B = \{d, e\}$ ಮತ್ತು $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$.

A ಗಣದ ಯಾವ ಗಣಾಂಶವೂ B ಗಣದಲ್ಲಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಆಗ, A ಮತ್ತು B ಗಣಗಳನ್ನು **ಬೇರ್ಪಟ್ಟ (Disjoint) ಗಣಗಳೆಂದು** ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$A = \{ a, b, c \}$ ಮತ್ತು $B = \{ d, e, f \}$ ಆದರೆ,

$A \cap B = \phi$ (ಏಕೆಂದರೆ, A ಗಣದ ಯಾವ **ಗಣಾಂಶವೂ** B ನಲ್ಲಿಲ್ಲ).

ಅಂದರೆ A ಮತ್ತು B ಬೇರ್ಪಟ್ಟ ಗಣಗಳು.

1.8 ವೆನ್ ಚಿತ್ರಗಳು (Venn diagrams)

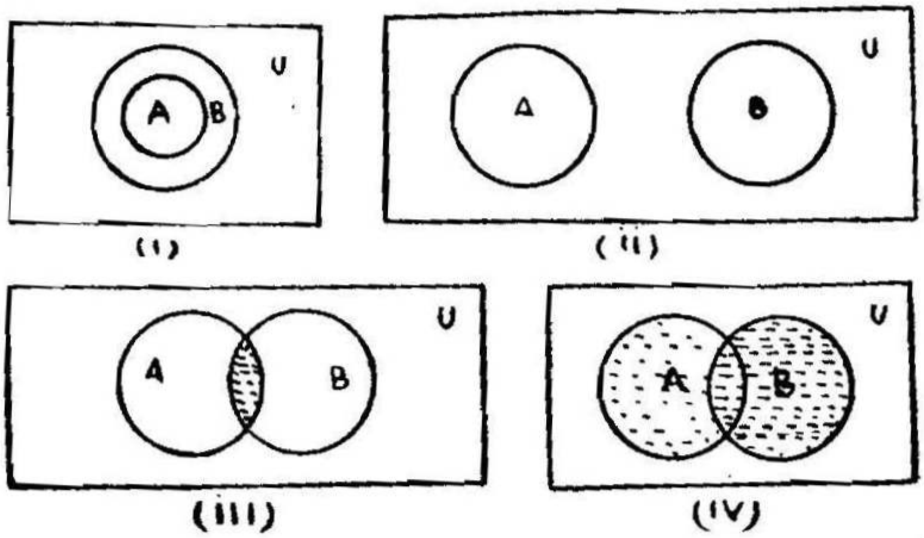
ಉಪಗಣಗಳ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ವೆನ್ ಚಿತ್ರಗಳ ಮೂಲಕ ಬಹು ಸುಲಭವಾಗಿ ತೋರಿಸಬಹುದು. ಗಣಗಳ ಮೇಲಿನ ಪೂರಕ, ಛೇದನ ಮತ್ತು ಸಂಯೋಗ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡ ಈ ಚಿತ್ರಗಳ ಮೂಲಕ ಬಹು ಸರಳವಾಗಿ ತೋರಿಸಬಹುದು. ಇವೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಕೆಳಕಂಡ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ವಿಶ್ವಗಣವನ್ನು ಒಂದು ಆಯದ ಕ್ಷೇತ್ರದಿಂದಲೂ ಉಳಿದೆಲ್ಲವನ್ನೂ ವಕ್ರರೇಖೆಯಿಂದ ಕೂಡಿದ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಿಂದಲೂ ಸೂಚಿಸಿದೆ.

1 ನೆಯ ಚಿತ್ರದ (i) ರಲ್ಲಿ $A \subset B$

1 ನೆಯ ಚಿತ್ರದ (ii) ರಲ್ಲಿ $A \cap B = \phi$

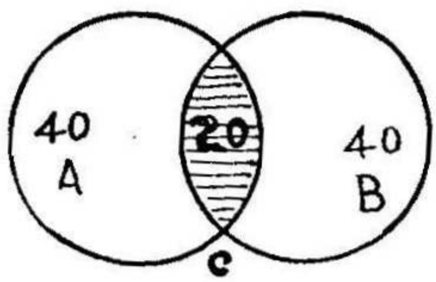
1 ನೆಯ ಚಿತ್ರದ (iii) ರಲ್ಲಿ $A \cap B \neq \phi$

1 ನೆಯ ಚಿತ್ರದ (iv) ರಲ್ಲಿ $A \cup B$ ಯನ್ನು **ಕೊಟ್ಟಿದೆ.**



ಚಿತ್ರ 1·1

ಉದಾಹರಣೆ: ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ 100 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿದ್ದಾರೆ. ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯೂ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ ಅಥವಾ ಸಮಾಜ ಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು ; 60 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನೂ ಮತ್ತು 20 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಸಮಾಜಶಾಸ್ತ್ರಗಳೆರಡನ್ನೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ. ಸಮಾಜ ಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?



ಚಿತ್ರ 1.2

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ A ಭಾಗವು ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡವರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ, B ಯು ಸಮಾಜಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡವರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ, C ಯು ಇವೆರಡನ್ನೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡವರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ

C ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ 20 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೂ, A ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ (ಅಂದರೆ C ಯ ಹೊರಗಡೆ) 40 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಇದ್ದಾರೆ. ಆದರೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ 100 ಆದುದರಿಂದ B ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ (ಅಂದರೆ C ಯ ಹೊರಗಡೆ) 40 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆ, ಸಮಾಜ ಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ಮಾತ್ರ ತೆಗೆದುಕೊಂಡವರ ಸಂಖ್ಯೆ 40. ಆದರೆ 20 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಎರಡೂ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದ್ದಾರೆ. ಆದುದರಿಂದ ಸಮಾಜ ಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡವರ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ $= 40 + 20 = 60$.

ಅಭ್ಯಾಸ 1 (ಅ)

1. ವೆನ್ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(i) $A \cap B = B \cap A$

(ii) $A \cup B = B \cup A$

(iii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(iv) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(v) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

(vi) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

(vii) $B \subset A$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $A \cup B = A$

(viii) $B \subset A$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ $A \cap B = B$

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎಲ್ಲ ಉಪಗಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $\{2, 5, 7\}$ (ii) $\{-3, -2, -4, -1\}$.

(iii) $\{a, b, c\}$ (iv) ϕ

3. $U = \{1, 2, 3, \ldots\ldots 8\}$ $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 5\}$ ಮತ್ತು $C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ಆದರೆ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಗಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

(i) $A \cup B$ (ii) $A \cap B$ (iii) B' (iv) $(B \cap C)'$

(v) $(A \cup B) \cap C$ (vi) $(C \cap B)' \cup A$.

4. $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, c, g\}$, $C = \{a, c, g, m, n, p\}$ ಆದರೆ, ಇವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(i) $A \cup B$ (ii) $A \cup C$ (iii) $A \cap B$ (iv) $\{A \cap B\} \cup C$

5. ಒಬ್ಬ ರೈತನು ತನ್ನ 80 ಎಕರೆ ಜಮೀನಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಎಕರೆಯಲ್ಲೂ ಮಾವು ಅಥವಾ ತೆಂಗಿನ ಸಸಿಗಳನ್ನು ನೆಡಲು ಇಚ್ಛಿಸುತ್ತಾನೆ. 40 ಎಕರೆಯಲ್ಲಿ

ಮಾವಿನ ಸಸಿಗಳನ್ನೂ 25 ಎಕರೆಗಳಲ್ಲಿ, ಮಾವು ಮತ್ತು ತೆಂಗಿನ ಸಸಿಗಳೆರಡನ್ನೂ ನೆಡುತ್ತಾನೆ. ಹಾಗಾದರೆ, ಅವನಿಗೆ ತೆಂಗಿನ ಸಸಿಗಳನ್ನು ನೆಡಲು ಎಷ್ಟು ಎಕರೆ ಸಿಗುತ್ತದೆ.

(2) ಘಾತನಿಯಮಗಳು (Laws of Indices)

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಘಾತಗಳು ಮತ್ತು ಘಾತ ನಿಯಮಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಕೆಲವು ಅಂಶಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಲಾಗಿದೆ.

1.9. x^n ಎಂಬ ಸಂಕೇತವು, ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ, x ಎನ್ನುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು n ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಸೂಚಿಸುವಷ್ಟು ಸಲ ತನ್ನಿಂದಲೇ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ,

$x^n = x \times x \times x \times \ldots\ldots\ldots\ldots n$ ಅಪವರ್ತನಗಳು.

x^n ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ, n ಪೂರ್ಣಾಂಕಕ್ಕೆ ಘಾತವೆಂದು ಹೆಸರು. ಘಾತಗಳು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗೆ ನಮೂದಿಸಿರುವ ನಿಯಮಗಳನ್ನು, ಬೀಜಾಕ್ಷರಗಳು ಅನುಸರಿಸುವ ಗಣಿತ ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ನಿಯಮ 1 : $x^m \times x^n = x^{m+n}$

ನಿಯಮ 2 : $x^m \div x^n = x^{m-n}$

ನಿಯಮ 3 : $(x^m)^n = x^{mn}$

ನಿಯಮ 4 : $(x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m$

ನಿಯಮ 5 : $\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}$

ಈ ನಿಯಮಗಳ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕಾಣಿಸಿದೆ.

ನಿಯಮ 1ರ ಸಾಧನೆ

x^m ಮತ್ತು x^n ಸಂಕೇತಗಳಿಗೆ, ಮೊದಲೇ ತಿಳಿಸಿದ ಅರ್ಥದ ಪ್ರಕಾರ,

$x^m = x \times x \times x \times \ldots\ldots\ldots\ldots m$ ಅಪವರ್ತನಗಳು

$x^n = x \times x \times x \times \ldots\ldots\ldots\ldots n$ ಅಪವರ್ತನಗಳು

$\therefore x^m \times x^n = (x \times x \times x \times \ldots\ldots\ldots m$ ಅಪವರ್ತನಗಳು)

$(x \times x \times x \times \ldots\ldots\ldots n$ ಅಪವರ್ತನಗಳು)

$= x \times x \times x \times \ldots\ldots\ldots (m+n)$ ಅಪವರ್ತನಗಳು.

$= x^{m+n}$

$\therefore x^m \times x^n = x^{m+n}$

ನಿಯಮ 2 ರ ಸಾಧನೆ

ನಿಯಮ 1 ರ ಪ್ರಕಾರ, $x^{m-n} \times x^{n} = x^{m-n+n} = x^{m}$. ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡು ಬದಿಗಳನ್ನೂ x^n ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,

$$x^{m-n} = \frac{x^m}{x^n}$$

ಈಗ, $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ,

(i) $m = n$ ಆಗಿದ್ದರೆ,

$$\frac{x^m}{x^n} = 1 \text{ ಮತ್ತು } x^{m-n} = x^0$$

$$\therefore\ x^0 = 1$$

(ii) $m = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ,

$$\frac{x^m}{x^n} = \frac{x^0}{x^n} = \frac{1}{x^n}$$

ಮತ್ತು $x^{m-n} = x^{0-n} = x^{-n}$

$$\therefore x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $3^{-4} = \frac{1}{3^4}$ ಅಥವಾ $\frac{1}{81}$ ಇತ್ಯಾದಿ.

ನಿಯಮ 3 ರ ಸಾಧನೆ

ನಿಯಮ 1 ರ ಪ್ರಕಾರ,

$$(x^m)^n = x^m \times x^m \times x^m \times \ldots\ldots\ldots.n \text{ ಆವರ್ತನಗಳು.}$$

$$= x^{m+m+m+\ldots\ldots\ldots.n \text{ ಪದಗಳು}}$$

$$= x^{m.n}$$

$$\therefore (x^m)^n = x^{m.n}$$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ $(2^3)^2 = 2^{3\cdot2} = 2^6 = 64$

ನಿಯಮ 4 ರ ಸಾಧನೆ

ನಿಯಮ 1 ರ ಪ್ರಕಾರ,

$$(x\cdot y)^m = (x\cdot y) \times (x\cdot y) \times (x\cdot y) \times \ldots\ldots m$$

ಆವರ್ತನಗಳು

$$= (x \times x \times x \times \ldots\ldots\ldots\, m \text{ ಅಪವರ್ತನಗಳು}) \times (y \times y \times y \times \ldots\ldots\ldots\, m \text{ ಅಪವರ್ತನಗಳು})$$

$$= x^m \cdot y^m$$

$$\therefore (x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m$$

ನಿಯಮ 5 ರ ಸಾಧನೆ

ನಿಯಮ 1 ರ ಪ್ರಕಾರ,

$$\left(\frac{x}{y}\right)^m = \left(\frac{x}{y}\right) \times \left(\frac{x}{y}\right) \times \left(\frac{x}{y}\right) \times \ldots\ldots\, m \text{ ಅಪವರ್ತನಗಳು}$$

$$= \frac{(x \times x \times x \times \ldots\ldots\ldots\ldots\, m \text{ ಅಪವರ್ತನಗಳು})}{(y \times y \times y \times \ldots\ldots\ldots\ldots\, m \text{ ಅಪವರ್ತನಗಳು})}$$

$$= \frac{x^m}{y^m}$$

$$\therefore \left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು:

ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರಿ:

(1) $$\frac{(2^3)^2 \cdot (3^2)^6 \cdot (20)^5}{(15)^5 \cdot (12)^4 \cdot (18)^3}$$

$$= \frac{(2^3)^2 \cdot (3^2)^6 \cdot (5 \cdot 2^2)^5}{(5 \cdot 3)^5 \cdot (2^2 \cdot 3)^4 \cdot (3^2 \cdot 2)^3}$$

$$= \frac{2^6 \cdot 3^{12} \cdot 5^5 \cdot 2^{10}}{5^5 \cdot 3^5 \cdot 2^8 \cdot 3^4 \cdot 3^6 \cdot 2^3}$$

$$= \frac{2^{6+10} \cdot 3^{12} \cdot 5^5}{2^{8+3} \cdot 3^{5+4+6} \cdot 5^5} = \frac{2^{16} \cdot 3^{12} \cdot 5^5}{2^{11} \cdot 3^{15} \cdot 5^5}$$

$$= \frac{2^{16-11}}{3^{15-12}}$$

$$= \frac{2^5}{3^3} = \frac{32}{27} = 1\frac{5}{27}$$

(2) $$\frac{(6a^2 x^3 y^2)^3}{(2a^3 by^3)^4} \times \left[\frac{(a^2 bx^6 y^4 c^2)}{12bx^8}\right]^2$$

$$= \frac{2^3 \cdot 3^3 \cdot (a^2)^3 (x^3)^3 (y^2)^3}{2^4 (a^3)^4 b^4 (y^3)^4} \times \frac{(a^2)^2 \cdot b^2 (x^6)^2 (y^4)^2 (c^2)^2}{(2^2)^2 \times 3^2 (b^2) (x^8)^2}$$

$$= \frac{2^3 3^3 \cdot a^6 \cdot x^9 y^6}{2^4 \cdot a^{12} \cdot b^4 \cdot y^{12}} \times \frac{a^4 \cdot b^2 \cdot x^{12} \cdot y^8 \cdot c^4}{2^4 \cdot 3^2 \cdot b^2 \cdot x^{16}}$$

$$= \frac{2^3 \cdot 3^3 \cdot a^{6+4} \cdot b^2 \cdot x^{9+12} \cdot y^{6+8} \cdot c^4}{2^{4+4} \cdot 3^2 \cdot a^{12} \cdot b^{4+2} \cdot x^{16} \cdot y^{12}}$$

$$= \frac{2^3 \cdot 3^3 \cdot a^{10} \cdot b^2 \cdot x^{21} \cdot y^{14} \cdot c^4}{2^8 \cdot 3^2 \cdot a^{12} \cdot b^6 \cdot x^{16} \cdot y^{12}}$$

$$= \frac{3^{3-2} \cdot x^{21-16} \cdot y^{14-12} \cdot c^4}{2^{8-3} \cdot a^{12-10} \cdot b^{6-2}}$$

$$= \frac{3 \cdot x^5 \cdot y^2 \cdot c^4}{2^5 \cdot a^2 \cdot b^4}$$

$$= \frac{3}{32} \times \frac{x^5 \cdot y^2 \cdot c^4}{a^2 b^4}$$

1.10 ಭಿನ್ನರಾಶೀಯ ಮತ್ತು ಋಣಘಾತಗಳು

ಈವರೆಗೆ m ಎಂಬುದು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ x^m ಎಂಬುದನ್ನು ನಿಷ್ಕರ್ಷಿಸಿದ್ದೆವು. ಆದರೆ, ಬೀಜಗಣಿತದ ವಿಸ್ತರಣ ಪ್ರಕೃತಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ x^m ಎಂಬ ಸಂಕೇತಕ್ಕೆ, ಘಾತವಾದ 'n' ಎಂಬುದು ಯಾವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೂ ಸರಿ ಹೊಂದುವಂತೆ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, x^{-n} ಮತ್ತು $x^{p/q}$ (p ಮತ್ತು q ಗಳು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು) ಸಂಕೇತಗಳಿಗೆ ಅರ್ಥವನ್ನು ತಿಳಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಇವಕ್ಕೆ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸುವ ಉದ್ದೇಶವು ಮೊದಲೇ ತಿಳಿಸಿರುವ ಐದು ಘಾತ ನಿಯಮಗಳನ್ನೂ, x^{-n} ಮತ್ತು $x^{p/q}$ ಸಂಕೇತಗಳು ಪಾಲಿಸುವಂತಾಗಲಿ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕು. ಇಲ್ಲಿ, ಘಾತಾಂಕಗಳ ಮೂಲ ನಿಯಮವಾದ $x^m \times x^n = x^{m+n}$ ಎಂಬುದು, m ಮತ್ತು n ಗಳ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿಕೊಂಡು ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತೇವೆ.

'n' ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಿರುವ x^{-n} ಸಂಕೇತದ ಅರ್ಥ

$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಎರಡನೆಯ ಘಾತ ನಿಯಮವನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದ ಅನಂತರ ತಿಳಿಯಲಾಯಿತು. ಈಗ ಒಂದನೇ ಘಾತ ನಿಯಮವನ್ನೇ ನೇರವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿ x^{-n} ಸಂಕೇತದ ಅರ್ಥವನ್ನು ತಿಳಿಯೋಣ.

ನಿಯಮ ಒಂದರ ಪ್ರಕಾರ, $x^n \times x^{-n} = x^{n-n} = x^0 = 1$

$\therefore\ x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. ಇದರಿಂದ, ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಅಂಶದಿಂದ ಛೇದಕ್ಕೂ, ಛೇದದಿಂದ ಅಂಶಕ್ಕೂ, ಅದರ ಘಾತದ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ವರ್ಗಾಯಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.

$x^{p/q}$ ಸಂಕೇತದ ಅರ್ಥ ವಿವರಣೆ

m, n ಗಳ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ, $x^m \times x^n = x^{m+n}$

ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $x^{p/q} \times x^{p/q} = x^{p/q+p/q}$

ಅಂದರೆ, $(x^{p/q})^2 = x^{2p/q}$

ಇದೇ ರೀತಿ, $(x^{p/q})^q = x^{p/q} \times x^{p/q} \times x^{p/q} \times \ldots q$ ಅಪವರ್ತನಗಳು

$= x^{p/q+p/q+p/q+\ldots\ldots\ldots\ldots q}$ ಪದಗಳು

$= x^{p/q \times q}$

$= x^p$

$\therefore\ x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$

ಈಗ, $p = 1$ ಆದರೆ, $x^{1/q} = \sqrt[q]{x}$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $x^{1/2} = \sqrt{x}$, $x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$, $x^{1/4} = \sqrt[4]{x}$ ಇತ್ಯಾದಿ.

$x^{p/q}$ ಸಂಕೇತಕ್ಕೆ p/q ಎಂಬುದು ಋಣ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದ್ದರೂ ಸಹ ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿರುವ ಅರ್ಥವು ಅನುಗುಣವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದೆ;

$\frac{p}{q}$ ನಲ್ಲಿ $p = -r$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $\frac{p}{q} = \frac{-r}{q}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, $x^{p/q} = x^{-r/q}$

$= \sqrt[q]{x^{-r}}$

$= \sqrt[q]{\frac{1}{x^r}}$

$= \frac{1}{\sqrt[q]{x^r}}$

$$\therefore\ x^{-r/q} = \frac{1}{\sqrt[q]{x^r}}$$

ಇಲ್ಲಿ, p ಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಋಣಪೂರ್ಣಾಂಕ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, q ವನ್ನು ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕವೆಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ,

ಅಂದರೆ, $q = -s$ (s ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ) ಆದಾಗ,

$x^{p/q} = x^{p/-s}$

$= \sqrt[-s]{x^p}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದರೆ $\sqrt[-s]{x^p}$ ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಅರ್ಥವಿಲ್ಲ.

ಘಾತ ನಿಯಮಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯದಾದ $x^m \times x^n = x^{m+n}$ ಎನ್ನುವುದು m ಮತ್ತು n ನ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಮೊದಲೇ ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡಿರುವುದರಿಂದ, ಉಳಿದ ನಿಯಮಗಳನ್ನು m ಮತ್ತು n ಗಳು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದಾಗ ಸಾಧಿಸಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೇ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಪೂರ್ಣಾಂಕ, ಭಿನ್ನರಾಶೀಯಗಳು ಧನ ಅಥವಾ ಋಣವಾಗಿದ್ದರೂ ಅವುಗಳನ್ನು **ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು (Rational numbers)** ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಘಾತವು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿರುವ ಐದು ಘಾತ ನಿಯಮಗಳೂ ಪಾಲಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ.

1.11 ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

1. ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(1) $(32^{-2/5}) = (2^5)^{-2/5}$

$= 2^{5\times(-2/5)}$

$= 2^{-2}$

$= \frac{1}{2^2}$

$= \frac{1}{4}$

$\therefore\ (32)^{-2/5} = \frac{1}{4}.$

(2) $x^{-3} \cdot y^{-1/3} \div x^{-2}$

$= \frac{x^{-3} \cdot y^{-1/3}}{x^{-2}}$

$$= \frac{y^{-1/3}}{x^{-2} \cdot x^{3}}$$

$$= \frac{y^{-1/3}}{x^{-2+3}}$$

$$= \frac{y^{-1/3}}{x}$$

$$= \frac{1}{x \cdot y^{1/3}}$$

2. ಇವುಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರಿ :

(1) $$\frac{3 + 3^{-1}}{5} + (-4)^{\circ} - \left(\frac{25}{9}\right)^{-1/2}$$

$$= \frac{3 + \frac{1}{3}}{5} + 1 - \left(\frac{5^{2}}{3^{2}}\right)^{-1/2}$$

$$= \frac{9 + 1}{3 \cdot 5} + 1 - \left(\frac{5^{-1}}{3^{-1}}\right)$$

$$= \frac{10}{15} + 1 - \frac{3}{5}$$

$$= \frac{10 + 15 - 9}{15}$$

$$= \frac{16}{15}$$

$$= 1\frac{1}{15}$$

(2) $$\left[a^{1/3}\left\{a^{-1/2}\, b^{-1/3}\, (a^{2}b^{2})^{2/3}\right\}^{-1/2}\right]^{6}$$

$$= \left[a^{1/3}\left\{a^{-1/2}\, b^{-1/3} \cdot a^{2\times 2/3} \cdot b^{2\times 2/3}\right\}^{-1/2}\right]^{6}$$

$$= \left[a^{1/3}\left\{a^{-1/2}\, b^{-1/3} \cdot a^{4/3} \cdot b^{4/3}\right\}^{-1/2}\right]^{6}$$

$$= \left[a^{1/3}\left\{a^{-1/2+4/3} \cdot b^{-1/3+4/3}\right\}^{-1/2}\right]^{6}$$

$$= \left[a^{1/3}\left\{a^{(-3+8)/6} \cdot b^{(-1+4)/3}\right\}^{-1/2}\right]^{6}$$

$$= \left[a^{1/3}\left\{a^{5/6} \cdot b\right\}^{-1/2}\right]^{6}$$

$$= [a^{1/3\times 6}\{a^{5/6}\,b\}^{-1/2\times 6}]$$

$$= a^{2}\cdot(a^{5/6}\,b)^{-3}$$

$$= a^{2}\cdot a^{-5/2}\cdot b^{-3} = a^{2-5/2}\cdot b^{-3} = a^{(4-5)/2}\cdot b^{-3}$$

$$= a^{-1/2}\cdot b^{-3} = \frac{1}{a^{1/2}\,b^{3}} = \frac{1}{b^{3}\sqrt{a}}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 1 (ಆ)

I. ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರಿ :

(1) 8° (2) $-x^{\circ}$ (3) $3y^{\circ}$ (4) $3^{\circ}y$ (5) $(3y)^{\circ}$

(6) $\left(\frac{x}{y}\right)^{\circ}$ (7) $\frac{x^{\circ}}{y}$

II. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನೂ ಧನ ಘಾತದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಬರೆಯಿರಿ :

(1) a^{-3} (2) x^{-1} (3) $(3)^{-10}$ (4) $x^{2}y^{-3}$ (5) $a^{-2}b^{-4}$ (6) $3x^{-2}$

(7) $5t^{-4}$ (8) $4r^{-1}s^{3}$ (9) $(2b)^{-3}$ (10) $(10^{-2})^{3}$ (11) $(xy)^{-5}$

(12) $\frac{1}{4}y^{-2}$ (13) $\frac{t^{-4}}{3}$ (14) $\frac{1}{x^{-2}}$ (15) $\frac{5}{y^{-4}}$ (16) $\frac{1}{c^{-1}}$

(17) $\frac{a^{3}}{b^{-2}}$ (18) $\frac{3x^{-2}}{y^{-4}}$ (19) $(x-y)^{-2}$ (20) $x^{-2}+y^{-2}$

III. ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(1) $\left(\frac{x}{3}\right)$ (2) $(x+2y)^{\circ}$ (3) 6^{-2} (4) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$ (5) $\frac{1}{4}(2)^{-2}$

(6) 10^{-3} (7) $\lambda(25)^{1/2}$ (8) $(64)^{3/2}$ (9) $3(49)^{1/2}$ (10) $(27)^{4/3}$

(11) $(-8)^{2/3}$ (12) $\left(\frac{9}{16}\right)^{3/2}$ (13) $4\left(\frac{1}{8}\right)^{2/3}$ (14) $9^{3/2}-3\cdot(5)^{\circ}$

(15) $3^{2}\cdot(3)^{-1}+3^{\circ}$ (16) $8^{1/3}+2^{-1}-3^{\circ}$ (17) $5x^{\circ}-(36)^{-1/2}+(32)^{2/5}$ 18) $(27)^{-2/3}-(3)^{-1}\cdot(25)^{1/2}$ (19) $6a^{\circ}-25^{1/2}+16^{1/4}$.

IV. $a=-2,\ b=3$ ಆದಾಗ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಬೀಜವಾಕ್ಯಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ :

(1) $a^{-1}+(9b)^{2/3}$ (2) $a^{\circ}+(3b)^{3/2}$ (3) $(2a)^{-3/2}\cdot b^{-2}$

(4) $2a^{-2}\div\left(\frac{3}{4}b\right)^{5/2}$

V. ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಕೊಟ್ಟ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರುತ್ತಾನೆ. ಹಾಗಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳಲ್ಲಿನ ತಪ್ಪುಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಿ. ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(1) $3x^{\circ}$ ಎಂಬುದರ ಉತ್ತರ 1, (2) $y^{2/3}$ ಎಂಬುದರ ಉತ್ತರ $\sqrt{y^3}$,

(3) $4^{-2/3}$ ಎಂಬುದರ ಉತ್ತರ $\frac{1}{4^{3/2}}=\frac{1}{8}$, (4) $3x^{-4}$ ಎಂಬುದರ ಉತ್ತರ $\frac{1}{3x^4}$

(5) x^{-2} ಎಂಬುದರ ಉತ್ತರ $-\frac{1}{x^2}$.

VI. ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿರಿ :

(1) $a^3\cdot a^{\circ}$ (2) $c\cdot c^{-3}$ (3) $e^{x}\cdot e^{-5x}$ (4) $x^{\circ}\cdot x^{-5}$ (5) $x^{-7}\cdot x^{8}$

(6) $x^{-5}\cdot x^5$ (7) $y^6\cdot y^{-2}$ (8) $3y^4\cdot y^{-4}$ (9) $10^7\cdot 10^{-2}$ (10) $b^{-3}\cdot b^{-5}$

(11) $x^{2m}\cdot x^{-m}$ (12) $a^3\,b^{-2}\cdot b^3$ (13) $a^4\div a^{-1}$ (14) $b^{-5}\div b^5$

(15) $x^{3/5}\div x^{1/3}$ (16) $c^{3/5}\div c^{-2/5}$ (17) $d^{-1/4}\div d^{-1/2}$ (18) $x^{-3}\div x$

(19) $(a^{1/2})^2$ (20) $(b^{1/3})^5$ (21) $(x^{-3/4})^2$ (22) $(y^{1/3})^{1/4}$ (23) $(z^{-2/5})^{-1/2}$

(24) $(e^{1/x})^{x}$ (25) $\sqrt[3]{y^9}$ (26) $\sqrt{10^{-6}}$ (27) $\sqrt[6]{x^{4/3}}$

(28) $\dfrac{(28)^2\cdot(27)^6\cdot(6\cdot5^2\cdot2^3)^4}{(21)^2\cdot(25)^5\cdot(3^2.2^5.5)^3}$

(29) $\left(\dfrac{2b^2\,x^3\,y^2}{3a^2\,b^3x^2\,y^3}\right)^3\times\left(\dfrac{3^2\,a^4\,b^3\,x\,y^4}{2^2\,bx^2\,y}\right)^2$

(30) $\dfrac{(a^x)^y\cdot(a^y)^y}{(a^x)^x\cdot(a^z)^x}\div\left(\dfrac{a^{-x}\,a^y}{a^z}\right)^z\times\dfrac{(a^x\cdot a^{-y})^x}{(a^{-z}\cdot a^y)^y}$

(31) $\left(\dfrac{x^2-y^2}{a^2-b^2}\right)^2\times\left(\dfrac{a+b}{x+y}\right)^3\div\left(\dfrac{x-y}{a-b}\right)^3$

(32) $\left(\dfrac{3a^2\,x^3\,y^2}{2a\,x^4\,y^2}\right)^2\div\left(\dfrac{2a^4\,x^4\,y^2}{3a^5\,x^2\,z^2}\right)^3\times\left(\dfrac{10x^3\,y^2\,z^4}{3x^2\,y^2\,z^6}\right)^2$

VII. ಕೆಳಕಂಡ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ:

(1) $3^x = 9$ (2) $2^y = 8$ (3) $3^x - 1 = 26$ (4) $2^{x-1} = 8$

(5) $5^{1-x} = \frac{1}{25}$ (6) $2^{x+3} = 128$ (7) $5^{3x-1} = 25$ (8) $8 \cdot 4^2 = 2^n$

(9) $3 \cdot 3^3 = 9^x$ (10) $4 \cdot 16^x = 4^3$ (11) $9^{x-1} = 3^{3x+4}$ (12) $36^{4y} = 6$

(13) $9^{2x} = 81$ (14) $27 = 3^{5t-2}$ (15) $4^{2t-1} = 8^{t+2}$ (16) $125^x = 5 \cdot 5^5$

ಅಧ್ಯಾಯ 2

ಕರಣಿಗಳು

(SURDS)

ಪರಿಮೇಯ ಮತ್ತು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

p ಮತ್ತು q ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿರಲಿ. ಯಾವುದಾದರೂ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು p/q ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದಾದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 2, -3, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{5}$, $\sqrt{\frac{85}{49}}$, ಇತ್ಯಾದಿ.

ಯಾವುದಾದರೂ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು p/q ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದಿದ್ದರೆ ಆ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{9}$, $\sqrt{\frac{9}{8}}$ ಇತ್ಯಾದಿ.

2.1 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ

ಒಂದು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಪರಿಮೇಯ ಮೂಲವನ್ನು **ಕರಣಿಯೆಂದು** ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರ ಪ್ರಕಾರ 'a' ಯೆಂಬ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ 'n' ನ ಮೂಲವಾದ $\sqrt[n]{a}$ ಎಂಬುದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಲ್ಲಿ $\sqrt[n]{a}$ ಯನ್ನು **n ನ ಪ್ರಮಾಣದ ಕರಣಿ** ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು.

$\sqrt[n]{a}$ ಎಂಬುದರಲ್ಲಿ, 'a' ಎಂಬುದನ್ನು ಕರಣಿಯ **ಆಧಾರವೆಂದೂ**, 'n' ಎಂಬುದನ್ನು ಕರಣಿಯ **ಘಾತವೆಂದೂ** ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

$n = 1$ ಆದರೆ $\sqrt[n]{a}$ ಕರಣಿಯಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

$n = 2$ ಆದರೆ $\sqrt[n]{a}$ ಯನ್ನು **ದ್ವಿಘಾತ** ಅಥವಾ **ದ್ವಿವರ್ಗ ಕರಣಿಯೆಂದೂ**,

$n = 3$ ಆದರೆ $\sqrt[n]{a}$ ಯನ್ನು **ತ್ರಿಘಾತಕರಣಿಯೆಂದೂ**,

$n = 4$, $n = 5$ ಆದಾಗ $\sqrt[n]{a}$ ಯನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಚತುರ್ಥ ಪ್ರಮಾಣದ ಕರಣಿ, ಪಂಚಮ ಪ್ರಮಾಣದ ಕರಣಿಗಳೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು : $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ ಗಳು ದ್ವಿವರ್ಗದ ಕರಣಿಗಳು,

$\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{7}$ ಗಳು ತ್ರಿವರ್ಗದ ಕರಣಿಗಳು ಮತ್ತು

$\sqrt[5]{6}$, $\sqrt[5]{9}$ ಗಳು ಪಂಚಮ ಪ್ರಮಾಣದ ಕರಣಿಗಳು.

ಆದರೆ, $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{27}$ ಗಳು ಕರಣಿಗಳಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, $\sqrt{4} = 2$ ಮತ್ತು $\sqrt[3]{27} = 3$ ಗಳು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

2.2 ಸಮರೂಪ ಮತ್ತು ಅಸಮರೂಪ ಕರಣಿಗಳು

ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಕರಣಿಗಳೆರಡರ ಭಾಗಲಬ್ಧವು ಒಂದು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಸಮರೂಪ ಕರಣಿಗಳೆಂದೂ ಹಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು **ಅಸಮರೂಪ ಕರಣಿ**ಗಳೆಂದೂ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, (1) $\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $\sqrt{12}$ ಸಮರೂಪ ಕರಣಿಗಳು.

ಏಕೆಂದರೆ $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{4 \times 3}}{\sqrt{3}}$

ಈಗ, $\sqrt[n]{xy} = x^{1/n} \cdot y^{1/n} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$ ಎಂಬ **ನಿಯಮದ ಪ್ರಕಾರ,**

$\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{4} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{4} = 2$. ಇದು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ.

(2) $\sqrt{5}$ ಮತ್ತು $\sqrt{18}$ ಅಸಮರೂಪಕರಣಿಗಳು.

ಏಕೆಂದರೆ, $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{9} \times \sqrt{2}}{\sqrt{5}} = 3 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$. **ಇಲ್ಲಿ 2 ಮತ್ತು 5 ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗಗಳಲ್ಲ.**

$\therefore \dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{5}}$ ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಸಮರೂಪ ಕರಣಿಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಅತ್ಯಂತ ಸರಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿದಾಗ ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಕರಣಿ ಅಥವಾ ಕರಣಿಗಳು ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿರುವುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, (1) $\sqrt{2}$. $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$,

$\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ ಇವುಗಳೆಲ್ಲ $\sqrt{2}$ ಎಂಬುದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ. ಇವೆಲ್ಲ ಸಮರೂಪ ಕರಣಿಗಳು. (2) $\sqrt{135} = 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$ ಮತ್ತು $\sqrt{375} = \sqrt{3 \times 125} = 5 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{3}$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ $\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $\sqrt{5}$ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು. ಆದುದರಿಂದ, ಇವು ಸಮರೂಪ ಕರಣಿಗಳು.

ಕರಣಿಗಳನ್ನು ಯಾವ ರೀತಿ ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪಕ್ಕೆ ತರಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

2.3 ಕರಣಿಗಳು ಅನುಸರಿಸುವ ನಿಯಮಗಳು

$\sqrt[n]{a}$ ಮತ್ತು $\sqrt[n]{b}$ ಎಂಬುವು ಎರಡು ಕರಣಿಗಳಾಗಿದ್ದರೆ,

ಆಗ, (i) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

(ii) $\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a/b}$

(iii) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇವು ಘಾತನಿಯಮಗಳಿಂದ ನೇರವಾಗಿ ಪಡೆಯಬಹುದಾದಂತಹ ನಿಯಮಗಳು. (i) ಮತ್ತು (ii) ನೆಯ ನಿಯಮಗಳು ಸಮಾನ ಘಾತದ ಎರಡು ಕರಣಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಅಥವಾ ಭಾಗಾಕಾರವು ಸಾಧ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತವೆ. (iii) ನೆಯ ನಿಯಮವು ಒಂದು ಕರಣಿಯನ್ನೂ ಅದರ ಬೆಲೆಯನ್ನೂ ಬದಲಾಯಿಸದೆ ಮತ್ತೊಂದು ಘಾತದ ಕರಣಿಯಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ.

2.4 ಕರಣಿಗಳ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನ

ಸಮರೂಪ ಕರಣಿಗಳ ಸಂಕಲನ ಅಥವಾ ವ್ಯವಕಲನ ಸಾಧ್ಯ. ಆದರೆ ಅಸಮರೂಪ ಕರಣಿಗಳಲ್ಲಿ ಇದು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

1. ಇವುಗಳನ್ನು ಸರಳರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿರಿ.

(1) $\sqrt{3} + \sqrt{12} + \sqrt{75} - 6\sqrt{3}$

$= \sqrt{3} + \sqrt{4 \times 3} + \sqrt{25 \times 3} - 6\sqrt{3}$

$= \sqrt{3} + \sqrt{4} \times \sqrt{3} + \sqrt{25} \times \sqrt{3} - 6\sqrt{3}$

$= \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$

$= \sqrt{3}(1 + 2 + 5 - 6)$

$= \sqrt{3}(2)$

$= 2\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{8} + \sqrt{27} - \sqrt{18} + \sqrt{75}$

$= \sqrt{4 \times 2} + \sqrt{3 \times 9} - \sqrt{9 \times 2} + \sqrt{25 \times 3}$

$= \sqrt{4} \times \sqrt{2} + \sqrt{3} \times \sqrt{9} - \sqrt{9} \times \sqrt{2} + \sqrt{25} \times \sqrt{3}$

$= 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$

$= \sqrt{2}(2-3) + \sqrt{3}(3+5)$
$= -\sqrt{2} + 8\sqrt{3}$
$= 8\sqrt{3} - \sqrt{2}$

2.5 ಕರಣಿಗಳ ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರ

ಸಮಾನಘಾತದ ಕರಣಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಆದುದರಿಂದಲೇ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಘಾತಗಳುಳ್ಳ ಕರಣಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದರೆ ಮೊದಲು ಅವುಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಘಾತದ ಕರಣಿಗಳಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) $\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{8} \times \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{5 \times 8 \times 3} = \sqrt[4]{120}$

(2) $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[5]{5}$ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದರೆ, ಎರಡೂ ಕರಣಿಗಳ ಘಾತಗಳು ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು. ಇಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಘಾತ 3 ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದರ ಘಾತ 5 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ. ವಾದ 15ಕ್ಕೆ ಎರಡರ ಘಾತಗಳನ್ನೂ ಪರಿವರ್ತಿಸಿದರೆ,

$\sqrt[3]{4} = \sqrt[15]{4^5}$ ಮತ್ತು $\sqrt[5]{5} = \sqrt[15]{5^3}$

$\therefore \sqrt[3]{4} \times \sqrt[5]{5} = \sqrt[15]{4^5} \times \sqrt[15]{5^3} = \sqrt[15]{4^5 \times 5^3} = \sqrt[15]{128000}$

ಮಿಶ್ರಕರಣಿ ಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮಿಶ್ರಬೀಜ ಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸುವಾಗ ಅನುಸರಿಸುವ ಕ್ರಮವನ್ನೇ ಪಾಲಿಸಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $(\sqrt[3]{3}+1)$ ನ್ನು $(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1)$ ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.

$(\sqrt[3]{3}+1)(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1) = \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1$
$= 3 + 1$
$= 4$

ಇದೇ ರೀತಿ ಸಮರೂಪ ಕರಣಿಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) $\sqrt[4]{9} \div \sqrt[4]{27} = \dfrac{\sqrt[4]{9}}{\sqrt[4]{27}} = \sqrt[4]{\dfrac{9}{27}}$

$= \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$

(2) $\sqrt[3]{4} \div \sqrt[5]{8} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[5]{8}}$

$= \frac{\sqrt[15]{4^5}}{\sqrt[15]{8^3}}$

$= \sqrt[15]{\frac{4^5}{8^3}}$

$= \sqrt[15]{\frac{2^{10}}{2^9}}$

$= \sqrt[15]{2}$

ಕರಣಿಯ ಪರಿಮೇಯಕಾರಕ (ವಿಕರಣೀಯ) ಅಪವರ್ತನಗಳು
(Rationalising factors of surds)

ಎರಡು ಕರಣಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಒಂದು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವು ಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಇನ್ನೊಂದರ **ವಿಕರಣೀಯ ಅಪವರ್ತನ**ವಾಗುತ್ತದೆ.

ದೃಷ್ಟಾಂತ: (1) $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$ ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt{a}$ ಮತ್ತು $\sqrt{a}$ ಪರಸ್ಪರ ವಿಕರಣೀಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = \sqrt{3 \times 3} = \sqrt{9} = 3$

$\therefore$ $\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $\sqrt{3}$ ಪರಸ್ಪರ ವಿಕರಣೀಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು.

ದೃಷ್ಟಾಂತ: (2) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})\quad(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = (a - b)$.

ಇದು ಒಂದು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ. ಹೀಗಿರುವುದರಿಂದ, $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ ಮತ್ತು $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ ಪರಸ್ಪರ ವಿಕರಣೀಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿವೆ. ಈ ಬಗೆಯ ದ್ವಿಪದ ಕರಣಿಗಳ ಜೊತೆಗಳಿಗೆ **ಅನುವರ್ತ ಕರಣಿಗಳೆಂದು** ಹೆಸರು. ಹೀಗೆ, ಅನುವರ್ತ ದ್ವಿಪದ ಕರಣಿಗಳ ಜೊತೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಇನ್ನೊಂದರ ವಿಕರಣೀಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುವುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $(\sqrt{5} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 5 - 3 = 2$

ಇದು ಒಂದು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $(\sqrt{5} - \sqrt{3})$ ಯ ವಿಕರಣೀಯ ಅಪವರ್ತನ $(\sqrt{5} + \sqrt{3})$ ಅಥವಾ $(\sqrt{5} + \sqrt{3})$ ಯ ವಿಕರಣೀಯ ಅಪವರ್ತನ $(\sqrt{5} - \sqrt{3})$ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಛೇದಗಳು ಕರಣಿಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಬಗೆಯ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಲು ಮೊದಲಿಗೆ ಛೇದಗಳ ವಿಕರಣೀಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು

ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಕ್ರಮವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ ಎಂಬುದರಲ್ಲಿ ಛೇದವು ಒಂದು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ. ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ದಶಮಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದ ಬಳಿಕ $\sqrt{5}$ ನ್ನು ಭಾಗಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಈ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳನ್ನು $\sqrt{3}$ ರ ವಿಕರಣೀಯ ಅಪವರ್ತನವಾದ $\sqrt{3}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸೋಣ.

ಆಗ, $$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5 \times 3}}{3} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

ಇಲ್ಲಿ $\sqrt{15}$ ನ್ನು 3ರಿಂದ ಭಾಗಿಸುವುದು ಸುಲಭ ಸಾಧ್ಯ.

(2) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಅದರ ಛೇದವನ್ನು ಮೊದಲು ವಿಕರಣಗೊಳಿಸಬೇಕು.

ಅಂದರೆ, $$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{(2+\sqrt{3})^2}{2^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{4+4\sqrt{3}+3}{4-3}$$

$$= 7+4\sqrt{3}$$

(3) $$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}$$

ಇದನ್ನು ವಿಕರಣೀಯ ಛೇದದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಇದರ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದವನ್ನು $(\sqrt{a}+\sqrt{a+1})$ ಎಂಬುದರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ,

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{a+1})(\sqrt{a}+\sqrt{a+1})}{(\sqrt{a}-\sqrt{a+1})(\sqrt{a}+\sqrt{a+1})}$$

$$= \frac{(\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{a+1} + (\sqrt{a+1})^2}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{a+1})^2}$$

$$= \frac{a + 2\sqrt{a(a+1)} + a + 1}{a - a - 1}$$

$$= -(2a + 2\sqrt{a(a+1)} + 1)$$

$$= -\left(2a + 1 + 2\sqrt{a(a+1)}\right)$$

(4) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ಇದನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರಿ.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಛೇದವನ್ನು ವಿಕರಣಗೊಳಿಸಿದರೆ, ಆಗ, ದತ್ತಬೀಜವಾಕ್ಯ

$$= \left[\frac{2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})} \times \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})}\right] + \left[\frac{3}{(\sqrt{2}-\sqrt{5})} \times \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})}\right] + \left[\frac{1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})} \times \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}\right]$$

$$= \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} + \frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2} + \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} + \frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{2-5} + \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2}$$

$$= \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2} + \frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(-3)} + \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{1}$$

$$= \sqrt{5} - \sqrt{3} - (\sqrt{2}+\sqrt{5}) + \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$= 0$$

$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ ಎಂಬ ತ್ರಿಪದ ಕರಣಿಯನ್ನು ವಿಕರಣಗೊಳಿಸುವ ಕ್ರಮ :

ಇಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಕರಣಿಯನ್ನು ($\sqrt{c}$ ಆಗಲಿ) ಮೊದಲು ವಿಕರಣಗೊಳಿಸೋಣ.

ಆಗ, $(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})\ (\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}$

$= (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{c})^2$

$= a + 2\sqrt{ab} + b - c$

$= (a + b - c) + 2\sqrt{ab}$

ಈಗ $(a + b - c + 2\sqrt{ab})$ ಯನ್ನು ವಿಕರಣಗೊಳಿಸಿದರೆ,

$(a + b - c + 2\sqrt{ab})(a + b - c - 2\sqrt{ab})$

$= (a + b - c)^2 - (2\sqrt{ab})^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca - 4ab$

$= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$

ಇದು ಒಂದು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ.

ಇಲ್ಲಿ $a + b - c - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2 - (\sqrt{c})^2$

$= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 - (\sqrt{c})^2$

$= (\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c})$

ಆದ್ದರಿಂದ $(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$, $(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})$, $(\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c})$, $(\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c})$ ಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಉಳಿದ ಮೂರರ ಗುಣಲಬ್ಧದ ವಿಕರಣೀಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ : $\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$ ಇದನ್ನು ವಿಕರಣಗೊಳಿಸಿ.

ಈಗ,

$(\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}) = (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2$

$= 5 + 3 + 2\sqrt{15} - 2$

$= 6 + 2\sqrt{15} = 2(3 + \sqrt{15})$

ಇದನ್ನು ವಿಕರಣಗೊಳಿಸಬೇಕಾದರೆ, $(3 - \sqrt{15})$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು.

ಆಗ, $2(3 + \sqrt{15})(3 - \sqrt{15}) = 2[(3)^2 - (\sqrt{15})^2]$

$= 2(9 - 15)$

$= 2 \times (-6)$

$= -12$

2.7 ದ್ವಿಘಾತಕರಣಿಗಳು ಪಾಲಿಸುವ ಪ್ರಮೇಯಗಳು

ಪ್ರಮೇಯ 1 : ಒಂದು ದ್ವಿಘಾತಕರಣಿಯನ್ನು, ಒಂದು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಹಾಗೂ ಮತ್ತೊಂದು ದ್ವಿಘಾತಕರಣಿಯ ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಸಾಧನೆ: m, a, b ಗಳು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೂ $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ ಗಳು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೂ ಇರಲಿ.

ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದರೆ, $\sqrt{a} = m \pm \sqrt{b}$ ಆಗಿರಲಿ....................(1)
ಎರಡು ಕಡೆಗಳನ್ನೂ ವರ್ಗೀಕರಿಸುವುದರಿಂದ,

$$a = m^2 \pm 2m\sqrt{b} + b$$

$$= m^2 + b \pm 2m\sqrt{b}$$

$$\therefore \sqrt{b} = \pm \frac{a - m^2 - b}{2m}$$

ಅಂದರೆ, ಒಂದು ಕರಣಿಯು ಪರಿಮೇಯ ರಾಶಿಗೆ ಸಮವೆಂದಾಯಿತು. ಆದರೆ ಇದು ಮೂಲತತ್ವದ ಪ್ರಕಾರ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ (1) ನೆಯ ಭಾವನೆ ತಪ್ಪು.

ಪ್ರಮೇಯ 2: m, n, a, b ಗಳು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೂ, $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ ಗಳು ಕರಣಿಗಳಾಗಿಯೂ ಇದ್ದು,

$m + \sqrt{a} = n + \sqrt{b}$ ಆದರೆ, ಆಗ $m = n$ ಮತ್ತು $a = b$ ಆಗುತ್ತವೆ.

ಸಾಧನೆ: ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದರೆ $m = n + k$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $n + k + \sqrt{a} = n + \sqrt{b}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, $\sqrt{b} = k + \sqrt{a}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದರೆ, ಇದು ಪ್ರಮೇಯ (1) ರ ಪ್ರಕಾರ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

$$\therefore m = n.$$

ಈಗ, $m = n$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$m + \sqrt{a} = n + \sqrt{b}$ ಎಂಬುದು

$n + \sqrt{a} = n + \sqrt{b}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ ಅಥವಾ $a = b$.

ದ್ವಿಪದೀಯ ದ್ವಿಘಾತ ಕರಣಿಗಳು (Quadratic binomial surds)

a ಯು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು $(a^2 - b)$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗಿದ್ದರೆ. $\sqrt{(a + \sqrt{b})}$ ಯನ್ನು $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸೋಣ.

$\sqrt{(a+\sqrt{b})} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ ಆಗಿರಲಿ. ಇದರ ಎರಡೂ ಕಡೆಗಳನ್ನೂ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿದರೆ, ಆಗ, $a + \sqrt{b} = x + y + 2\sqrt{xy}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಪರಿಮೇಯ ಮತ್ತು ಅಪರಿಮೇಯ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಗೊಳಿಸಿದರೆ, $a = x + y$; $b = 4xy$.

ಈಗ $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ ಗಳ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬೇಕಾದರೆ, x ಮತ್ತು y ಗಳು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆ, a ಯು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಬೇಕು. ಹಾಗೂ, $x - y = \sqrt{(x+y)^2 - 4xy} = \sqrt{a^2 - b}$. ಆದುದರಿಂದ $a^2 - b$ ಒಂದು ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗಿರಬೇಕು.

ಈಗ, x ಮತ್ತು y ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು,

$$x + y = a$$

$$x - y = \sqrt{a^2 - b}$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ x ಬೆಲೆಯು $\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - b})$ ಎಂದೂ ಮತ್ತು y ಬೆಲೆಯು $\frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - b})$ ಎಂದೂ ಆಗುತ್ತದೆ.

$$\therefore \sqrt{(a+\sqrt{b})} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - b})} + \sqrt{\tfrac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - b})}$$

ಮತ್ತು, $\sqrt{(a-\sqrt{b})} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - b})} - \sqrt{\tfrac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - b}}$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) $(8 + 2\sqrt{7})$ ಕರಣಿಯ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\sqrt{8 + 2\sqrt{7}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, ಎರಡು ಬದಿಗಳನ್ನೂ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿದರೆ, $8 + 2\sqrt{7} = x + y + 2\sqrt{xy}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ ಪರಿಮೇಯ ಮತ್ತು ಅಪರಿಮೇಯ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಗೊಳಿಸಿದರೆ,

$$x + y = 8$$

$$2\sqrt{xy} = 2\sqrt{7}$$

ಅಥವಾ $4xy = 4 \times 7 = 28$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ, $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$

$$\therefore (x - y) = \sqrt{(x + y)^2 - 4x}$$

$$= \sqrt{64 - 28}$$
$$= \sqrt{36}$$
$$= 6$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} x + y &= 8 \\ x - y &= 6 \end{aligned}\right\}$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರೆ, $x = 7$ ಮತ್ತು $y = 1$

$$\therefore \sqrt{8 + 2\sqrt{7}} = \sqrt{7} + 1$$

(2) $10 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6} + 6\sqrt{2}$ ಕರಣಿಯ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇದು, ದ್ವಿಪದೀಯ ದ್ವಿಘಾತ ಕರಣಿಯಲ್ಲ. ಆದರೆ, ಅದರ ಸ್ವರೂಪದಿಂದ ಅದು, x, y, z ಗಳು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ $(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})$ ಎಂಬ ಕರಣಿಯ ವರ್ಗವಾಗಿರಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ, $\sqrt{10 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6} + 6\sqrt{2}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ, ಆಗ, ಎರಡೂ ಕಡೆಗಳನ್ನು ವರ್ಗೀಕರಣ ಮಾಡುವುದರಿಂದ,

$10 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6} + 6\sqrt{2} = x + y + z + 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{yz} + 2\sqrt{zx}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಪರಿಮೇಯ ಮತ್ತು ಅಪರಿಮೇಯ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಸಮಗೊಳಿಸಿದರೆ,

$$x + y + z = 10$$
$$2\sqrt{xy} = 2\sqrt{3}$$
$$2\sqrt{yz} = 2\sqrt{6}$$
$$2\sqrt{zx} = 6\sqrt{2}$$ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಅಂದರೆ, $xy = 3,$

$yz = 6,$

$zx = 18$

ಈಗ, $x^2 = \dfrac{xy \times zx}{yz} = \dfrac{3 \times 18}{6} = 9$

$\therefore x = \pm 3$

ಹಾಗೂ, $y^2 = \dfrac{yz \times xy}{zx} = \dfrac{6 \times 3}{18} = 1$

$$\therefore y = \pm 1$$

$$z^2 = \frac{yz \times zx}{xy} = \frac{6 \times 18}{3} = 36$$

$$\therefore z = \pm 6$$

$x = 3,\ y = 1,\ z = 6$ ಬೆಲೆಗಳು,

$x + y + z = 10$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಅಪೇಕ್ಷಿಸಿದ ವರ್ಗಮೂಲವು $(\sqrt{3} + 1 + \sqrt{6})$ ರೂಪದಲ್ಲಿರಬೇಕು.

ಅಭ್ಯಾಸ 2

1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಕರಣಿಗಳೋ, ಅಲ್ಲವೋ ತಿಳಿಸಿರಿ.

(i) $\sqrt[3]{6}$ (ii) $\sqrt[4]{16}$ (iii) $\sqrt[3]{81}$ (iv) $\sqrt[6]{64}$ (v) $\sqrt[10]{250}$ (vi) $\sqrt[3]{75}$.

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕರಣಿಗಳು ಸಮರೂಪ ಕರಣಿಗಳೋ ಅಲ್ಲವೋ ತಿಳಿಸಿರಿ.

(i) $\sqrt{2},\ \sqrt{50},\ \sqrt{162},\ \sqrt{32}$ (ii) $\sqrt{5},\ \sqrt{45},\ \sqrt{80},\ \sqrt{245}$
(iii) $\sqrt{3},\ \sqrt{35},\ \sqrt{56},\ \sqrt{28}$ (iv) $2\sqrt{6},\ \sqrt{46},\ \sqrt{198},\ \sqrt{126}$
(v) $\sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{250},\ 3\sqrt[3]{16},\ 5\sqrt[3]{54}$ (vi) $\sqrt[4]{3},\ \sqrt[4]{48},\ \sqrt[4]{768}$
(vii) $\sqrt[3]{5},\ \sqrt[3]{136},\ \sqrt[3]{75},\ \sqrt[3]{120}$ (vii) $\sqrt[4]{2},\ \sqrt[4]{80},\ \sqrt[4]{8},\ \sqrt[4]{18}$

3. $\sqrt[3]{5}$, ಮತ್ತು $\sqrt{2}$ ರಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಯಾವುದಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವಾಗಿದೆಯೆಂದು ತಿಳಿಸಿರಿ :

4. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸರಳರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ :

(i) $\sqrt{2}+\sqrt{18}-\sqrt{50}+4\sqrt{2}$ (ii) $\sqrt[4]{5}+\sqrt[3]{40}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{80}-2\sqrt[3]{5}$
(iii) $\sqrt[5]{96}+3\sqrt[5]{3}+4\sqrt{72}-\sqrt{512}$ (iv) $\sqrt{8}+\sqrt{32}-\sqrt{98}-\sqrt{72}$.
(v) $2\sqrt{32}-\sqrt{12}+4\sqrt{50}+\sqrt{27}-6\sqrt{18}-5\sqrt{3}$ (vi) $3\sqrt[3]{3}$ $+2\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{24}+6\sqrt[3]{16}-5\sqrt{1000}+15\sqrt[3]{250}-2\sqrt[3]{192}$.

5. ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ, ವರ್ಗ ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರಿ :

(i) $\sqrt[3]{10}\times\sqrt[3]{100}$, (ii) $\sqrt[4]{8}\times\sqrt[4]{2}$, (iii) $(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})$,
(iv) $(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2)$ (v) $(\sqrt{3}+\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{2})$ (vi) $(\sqrt{6}-4\sqrt{2})$ $(\sqrt{3}-2\sqrt{2})$, (vii) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$,

(viii) $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})\;(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})$ (ix) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$
(x) $(x+\sqrt{x}+1)\;(x-\sqrt{x}-1)$ (xi) $\{\sqrt{x-y}+z\}$
$\{\sqrt{x-y}-z\}$ (xii) $(x-y)\;(\sqrt{x}-\sqrt{y})\;(\sqrt{x}+\sqrt{y})$.

6. ಛೇದಗಳನ್ನು ವಿಕರಣಗೊಳಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರಿ:

(i) $\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \dfrac{24}{\sqrt{6}},\ \dfrac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{6}},\ \dfrac{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}$

(ii) $\dfrac{1}{3\sqrt{2}-4},\ \dfrac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}},\ \dfrac{3}{\sqrt{5}+2},\ \dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$

(iii) $\dfrac{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$. (iv) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+1}$

(v) $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

(vi) $\dfrac{1}{(2-\sqrt{3})^2}-\dfrac{8}{(2-\sqrt{3})\;(2+\sqrt{3})}+\dfrac{1}{(2+\sqrt{3})^2}$

7. ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(i) $3-2\sqrt{2}$ (ii) $6+2\sqrt{5}$ (iii) $4-2\sqrt{3}$ (iv) $9+2\sqrt{14}$
(v) $9-2\sqrt{14}$ (vi) $8+4\sqrt{3}$ (vii) $12-2\sqrt{27}$ (viii) $16+4\sqrt{15}$
(ix) $12+4\sqrt{5}$ (x) $8-2\sqrt{15}$ (xi) $13+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+4\sqrt{6}$
(xii) $5-\sqrt{10}+\sqrt{15}-\sqrt{6}$

8. $$\frac{1}{(\sqrt{12-2\sqrt{5}})}-\frac{1}{\sqrt{(8-2\sqrt{15})}}-\frac{2}{\sqrt{(10+2\sqrt{21})}}=0$$
ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ,

9. $$\frac{1}{\sqrt{(5+2\sqrt{6})}}+\frac{3}{\sqrt{(7-2\sqrt{10})}}=\frac{2}{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}$$
ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ,

ಅಧ್ಯಾಯ 3

ಲಘುಗಣಕಗಳು

(LOGARITHMS)

3.1 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ :

n ಸೊನ್ನೆಗಿಂತ ಜಾಸ್ತಿ ಮತ್ತು ಒಂದಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದು, $m = n^y$ ಆದರೆ, y ಗೆ n ನ ಆಧಾರದಲ್ಲಿ **ವಿರುದ್ಧ ಘಾತ** ಅಥವಾ **ಲಘುಗಣಕ** ಎಂದು ಹೆಸರು. ಮತ್ತು $y = \log_n m$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಲಘುಗಣಕವನ್ನು **log** (ಲಾಗ್) ಎಂಬ ಪದದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$3^5 = 243 \quad \therefore \log_3 243 = 5$

$4^3 = 64 \quad \therefore \log_4 64 = 3$

$\sqrt[3]{8} = 2$ ಅಂದರೆ $8^{1/3} = 2 \quad \therefore \log_8 2 = \frac{1}{3}$

$10^3 = 1000 \quad \therefore \log_{10} 1000 = 3$

$10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{\cdot}01 \quad \therefore \log_{10}(0{\cdot}01) = -2$

3.2 ಲಘುಗಣಕಗಳ ನಿಯಮಗಳು

(1) $x^0 = 1 \quad \therefore \log 1 = 0$

ಅಂದರೆ, ಯಾವ ಆಧಾರವಿದ್ದರೂ 1ರ **ಲಘುಗಣಕವು 0 ಆಗುತ್ತದೆ.**

(2) $x^1 = x \quad \therefore \log_x x = 1$

ಅಂದರೆ, ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಆಧಾರ ಒಂದೇ ಆದರೆ, **ಸಂಖ್ಯೆಯ ಲಘುಗಣಕವು** 1 ಆಗುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 1 : $\log_e mn = \log_e m + \log_e n$

ಸಾಧನೆ : $m = e^x$ ಮತ್ತು $n = e^y$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \log_e m = x$ ಮತ್ತು $\log_e n = y$

ಈಗ m ಅನ್ನು n ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ,

$m\,n = e^x \cdot e^y = e^{x+y}$

ಆದರೆ ಲಘುಗಣಕದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ, $\log_e mn = x + y$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$\therefore \log_e mn = \log_e m + \log_e n$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಲಘುಗಣಕವು ಅದರ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಲಘುಗಣಕಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 2: $\log_e \left(\frac{m}{n}\right) = \log_e m - \log_e n$

ಸಾಧನೆ: $m = e^x$ ಮತ್ತು $n = e^y$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \log_e m = x$ ಮತ್ತು $\log_e n = y$.

ಈಗ, m ಅನ್ನು n ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,

$$\frac{m}{n} = \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

ಲಘುಗಣಕಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ, $\log_e \left(\frac{m}{n}\right) = x - y$

$$\therefore \log_e \left(\frac{m}{n}\right) = \log_e m - \log_e n$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಲಘುಗಣಕವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಲಘುಗಣಕಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 3 : $\log_e m^n = n \log_e m$

ಸಾಧನೆ: $m = e^x$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore \log_e m = x$ (ವ್ಯಾಖ್ಯೆ)

ಆದರೆ, $m^n = (e^x)^n = e^{nx}$

$\therefore \log_e m^n = n x$

$\therefore \log_e m^n = n \log_e m.$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ n ಘಾತದ ಲಘುಗಣಕವು, n ಮತ್ತು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಲಘುಗಣಕ ಇವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆಧಾರವು ಯಾವುದಿದ್ದರೂ, ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲ ಪ್ರಮೇಯಗಳೂ ನಿಜವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) $3^3 = 27$ ಅನ್ನು ಲಘುಗಣಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ, ಆಗ,
$\log_3 27 = 3$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ,

(2) $10^{-3} = \frac{1}{1000}$ ಅನ್ನು ಲಘುಗಣಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ, ಆಗ $\log_{10}\left(\frac{10}{1000}\right) = -3$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

(3) $\log_{10} 1000 = 3$ ಅನ್ನು ಆಧಾರಘಾತದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ, ಅದು $10^3 = 1000$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

(4) $\log_a \left(\frac{xy}{z^2}\right) + \log_a \left(\frac{yz}{x^2}\right) + \log_a \left(\frac{zx}{y^2}\right) = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಎಡಭಾಗ $= \log_a \left(\frac{xy}{z^2}\right) + \log_a \left(\frac{yz}{x^2}\right) + \log_a \left(\frac{zx}{y^2}\right)$

$= \log_a xy - \log_a z^2 + \log_a yz - \log_a x^2$

$+ \log_a zx - \log_a y^2$

$= \log_a x + \log_a y - 2 \log_a z + \log_a y + \log_a z - 2 \log_a x$

$+ \log_a z + \log_a x - 2 \log_a y$

$= 0$

= ಬಲಭಾಗ

(5) ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರಿ :

(i) $\log \left(\frac{x^2y^4}{\sqrt{z^3}}\right)$; (ii) $\frac{\log_a 729 - \log_a 64}{\log_a 3, \log_a 2}$

(i) $\log \left(\frac{x^2y^4}{\sqrt{z^3}}\right) = \log x^2 y^4 - \log \sqrt{z^3}$

$= \log x^2 + \log y^4 - \log (z)^{3/2}$

$= 2 \log x + 4 \log y - \frac{3}{2} \log z$

(ii) $\frac{\log_a 729 - \log_a 64}{\log_a 3 - \log_a 2}$

$= \frac{\log_a \left(\frac{729}{64}\right)}{\log_a \left(\frac{3}{2}\right)}$

$$= \frac{\log_a \left(\frac{3}{2}\right)^6}{\log_a (3/2)}$$

$$= \frac{6 \log_a \left(\frac{3}{2}\right)}{\log_a (3/2)}$$

$$= 6$$

(6) $\log_{10} 3 = 0 \cdot 4771$, $\log_{10} 5 = 0 \cdot 6990$, $\log_{10} 2 = 0 \cdot 3010$, $\log_{10} 7 = 0 \cdot 8451$ ಆದರೆ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಲಘು ಗುಣಾಂಕಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ: (i) $\log_{10} 150$, (ii) $\log_{10} 350$, (iii) $\log_{10} 42$, (iv) $\log_{10} 2100$

(i) $\log_{10} 150 = \log_{10} (3 \times 5 \times 10)$
$= \log_{10} 3 + \log_{10} 5 + \log_{10} 10$
$= 0 \cdot 4771 + 0 \cdot 6990 + 1$
$= 2 \cdot 1761$

(ii) $\log_{10} 350 = \log_{10} (7 \times 5 \times 10)$
$= \log_{10} 7 + \log_{10} 5 + \log_{10} 10$
$= 0 \cdot 8451 + 0 \cdot 6990 + 1$
$= 2 \cdot 5441$

(iii) $\log_{10} 42 = \log_{10} (7 \times 3 \times 2)$
$= \log_{10} 7 + \log_{10} 3 + \log_{10} 2$
$= 0 \cdot 8451 + 0 \cdot 4771 + 0 \cdot 3010$
$= 1 \cdot 6232$

(iv) $\log_{10} 2100 = \log_{10} (3 \times 7 \times 10^2)$
$= \log_{10} 3 + \log_{10} 7 + \log_{10} 10^2$
$= \log_{10} 3 + \log_{10} 7 + 2 \log_{10} 10$
$= 0 \cdot 4771 + 0 \cdot 8451 + 2 \times 1$
$= 3 \cdot 3222$

ಅಭ್ಯಾಸ 3 (ಅ)

I. $\log_a 8 = 2$ ಆದರೆ, 'a' ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

II. $\log_a 1000 = 3$ ಆದರೆ, 'a' ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

III. ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ :

(1) $\log_e \dfrac{y^4 z^8}{x}$ (2) $\log_a 9 - \log_a 81 + 2 \log_a 3$

(3) $\dfrac{\log_{10} 4 + \log_{10} 25}{\log_{10} 0\cdot01}$ (4) $\log_{10} 40 + \log_{10} 50 + \log_{10} 5$

(5) $\log \left(\dfrac{a^2 b^3}{ac^2}\right)$ (6) $\dfrac{\log 3125 + \log 243}{\log 5 + \log 3}$

(7) $\log (x^3 - 1) - \log (x^2 + x + 1)$

(8) $\dfrac{1}{2} \log \dfrac{16}{25} + \dfrac{1}{5} \log \dfrac{32}{243} - \log \dfrac{8}{15}$

IV. $\log_{10} 3 = 0\cdot4771$; $\log_{10} 5 = 0\cdot6990$; $\log_{10} 11 = 1\cdot0414$ ಮತ್ತು $\log_{10} 13 = 1\cdot1139$ ಆದರೆ, ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಲಘುಗಣಾಂಕಗಳ ಬೆಲೆಯೇನು ?

(1) $\log_{10} 1650$ (2) $\log_{10} 15$ (3) $\log_{10} 55$ (4) $\log_{10} (1430)$
(5) $\log_{10} 195$ (6) $\log_{10} (71{,}500)$

V. $\dfrac{1}{\log_y xy} + \dfrac{1}{\log_x xy} = 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

VI. $x = \dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$ ಆದರೆ, $z = \frac{1}{2} \log_e \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

VII. $\frac{1}{3} \log_{10} \left(\dfrac{27}{64}\right) - \frac{1}{4} \log_{10} \left(\dfrac{81}{625}\right) + \frac{1}{2} \log_{10} \left(\dfrac{4}{49}\right) + \log_{10} 28 = 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

3·3 ಸಾಮಾನ್ಯ ಲಘುಗಣಾಂಕಗಳು

ಲಘುಗಣಕದ ಆಧಾರವು 10 ಆದರೆ ಅದಕ್ಕೆ **ಸಾಮಾನ್ಯ ಲಘುಗಣಾಂಕ** ಎಂದು ಹೆಸರು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\log_{10} N$, $\log_{10} 0\cdot72$

ಲಕ್ಷಣಾಂಶ (Characteristic) : ಲಘುಗಣಕದ ಬೆಲೆಯ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಭಾಗಕ್ಕೆ **ಲಕ್ಷಣಾಂಶ** ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, (1) $\log_{10} 325$ ರ ಲಕ್ಷಣಾಂಶವು 2 ಮತ್ತು $\log_{10} 8$ ರ ಲಕ್ಷಣಾಂಶವು 0. ಅಂದರೆ, ಲಕ್ಷಣಾಂಶವನ್ನು ಬರೆಯುವಾಗ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಒಟ್ಟು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಕಳೆದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎರಡು ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಲಘುಗಣಾಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಭಾಗ (Integer part) ಗಳಾಗಿವೆ.

(2) $\log_{10} 0{\cdot}072$ ರ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಭಾಗವು ಋಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅದರ ಲಕ್ಷಣಾಂಶವು -2.

ಲಕ್ಷಣಾಂಶವನ್ನು ತಿಳಿಯುವ ಕ್ರಮ :

ಪೂರ್ಣಾಂಕವು 1 ಕ್ಕಿಂತ ಜಾಸ್ತಿಯಿದ್ದರೆ

ಸಂಖ್ಯೆ	ಒಟ್ಟು ಪೂರ್ಣಾಂಕ	ಲಕ್ಷಣಾಂಶ
1 ರಿಂದ 9 ರವರೆಗೆ	1	$1 - 1 = 0$
10 ರಿಂದ 99 ರವರೆಗೆ	2	$2 - 1 = 1$
100 ರಿಂದ 999 ರವರೆಗೆ	3	$3 - 1 = 2$
1000 ರಿಂದ 9999 ರವರೆಗೆ	4	$4 - 1 = 3$
ಇದೇ ರೀತಿ		

ಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಶೂನ್ಯವಾದರೆ,

ಸಂಖ್ಯೆ	ಲಘುಗುಣಾಂಕ	ಲಕ್ಷಣಾಂಶ
0·1	$\log_{10} 0{\cdot}1 = \log_{10} 10^{-1} = -1$	$-1 = \bar{1}$
0·01	$\log_{10} 0{\cdot}01 = \log_{10} 10^{-2} = -2 \log_{10} 10 = -2$	$-2 = \bar{2}$
0·001	$\log_{10} 0{\cdot}001 = \log_{10} 10^{-3} = -3 \log_{10} 10 = -3$	$-3 = \bar{3}$
ಇದೇ ರೀತಿ		

$\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ ಮುಂತಾದುವನ್ನು ಬಾರ್ ಒಂದು, ಬಾರ್ ಎರಡು, ಬಾರ್ ಮೂರು ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ.

ಅಂದರೆ, ಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಶೂನ್ಯ (ಸೊನ್ನೆ) ವಾಗಿ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕವು 0·1 ಆದರೆ ಲಕ್ಷಣಾಂಶವು -1 ಅಥವಾ $\bar{1}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹಿಂದೆ ಒಂದು ಸೊನ್ನೆಯಿದ್ದರೆ ಲಕ್ಷಣಾಂಶವು $-1 - 1 = -2 = \bar{2}$ ಇತ್ಯಾದಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

3.4 ದಶಮಾಂಶ (Mantissa)

ಲಘುಗಣಕದ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ ಭಾಗ (Fractional part) ವನ್ನು ದಶಮಾಂಶವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕಗಳಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

(1) $\log_{10} 325 = 2 \cdot 5119$

ಇದರಲ್ಲಿ 2 ಲಕ್ಷಣಾಂಶ ಮತ್ತು 0·5119 ದಶಮಾಂಶ.

(2) $\log_{10} 0 \cdot 025 = \bar{2} \cdot 3979$

ಇದರಲ್ಲಿ $\bar{2}$ ಲಕ್ಷಣಾಂಶ ಮತ್ತು 0·3979 ದಶಮಾಂಶ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) $\log 5 = 0 \cdot 6990$ ಮತ್ತು $\log 2 = 0 \cdot 3010$ ಆದರೆ, $\log \left(\frac{125}{16}\right)$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\log\left(\frac{125}{16}\right) = \log\left(\frac{5^3}{2^4}\right)$$

$$= \log 5^3 - \log 2^4$$

$$= 3 \log 5 - 4 \log 2$$

$$= 3 \times 0 \cdot 6990 - 4 \times 0 \cdot 3010$$

$$= 2 \cdot 0970 - 1 \cdot 2040$$

$$= 0 \cdot 8930$$

(2) $\log 7 = 0 \cdot 8451$, $\log 5 = 0 \cdot 6990$, $\log 2 = 0 \cdot 3010$, $\log 3 = 0 \cdot 4771$ ಮತ್ತು $\log 10 = 1$ ಆದರೆ, $\log \sqrt[6]{\frac{350}{6}}$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\log \sqrt[6]{\frac{350}{6}} = \log\left(\frac{350}{6}\right)^{1/6}$$

$$= 1/6 \log \frac{350}{6}$$

$= \frac{1}{6}$ [log 350 − log 6]

$= \frac{1}{6}$ [log (7 × 5 × 10) − log (3 × 2)]

$= \frac{1}{6}$ [(log 7 + log 5 + log 10) − (log 3 + log 2)]

$= \frac{1}{6}$ [(0·8451 + 0·6990 + 1) − (0·4771 + 0·3010)]

$= \frac{1}{6}$ [2·5441 − 0·7781]

$= \frac{1}{6}$ [1·7660]

= 0·2943

$$\therefore \log \sqrt[6]{\frac{350}{6}} = 0{\cdot}2943.$$

3·5 ಸಾಮಾನ್ಯ ಲಘುಗಣಕದ ಕೋಷ್ಟಕಗಳು

ಸಾಮಾನ್ಯ ಲಘುಗಣಕದ ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಿ ಪುಸ್ತಕದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುತ್ತಾರೆ. ಈ ಕೋಷ್ಟಕಗಳಿಂದ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಲಘುಗಣಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಲಘುಗಣಕವು ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಮ್ಮ ಅನುಕೂಲಕ್ಕೋಸ್ಕರ **ವಿರುದ್ಧ ಲಘುಗಣಕ (Antilogarithm)** ವೆಂದು ಕರೆಯಬಹುದು.

ಲಘುಗಣಕದ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ವಿಧಾನ

ಕೋಷ್ಟಕಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು :

(1) 7859 ರ ಲಘುಗಣಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ 4 ಅಂಕಗಳಿರುವುದರಿಂದ ಅದರ ಲಕ್ಷಣಾಂಶವು 3.

ದಶಮಾಂಶವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಕೋಷ್ಟಕದ 78 ನೇ ಸಾಲಿನ 5 ನೇ ಅಂಕಣ (Column) ದಲ್ಲಿ ನೋಡಿದಾಗ 8949 ಸೂಚಿತವಾಗಿರುವುದು ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ. ಅದೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳ ಕೆಳಗೆ 9 ನೇ ಅಂಕಣದಲ್ಲಿ 5 ನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದೆ. 8949 ಕ್ಕೆ 5 ನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ 8954 ಬರುತ್ತದೆ.

$\therefore$ log 7859 = 3·8954.

(2) 785·9 ರ ಲಘುಗಣಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

785·9 ರ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಭಾಗವು 785. ಇದರಲ್ಲಿ 3 ಅಂಕಗಳಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದರ ಲಕ್ಷಣಾಂಶವು 2.

785·9 ಮತ್ತು 7859 ಎರಡರಲ್ಲಿಯೂ ಮೂಲ ಅಂಕಗಳ ಜೋಡಣೆಯು ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಮಾಂಶವೂ 0·8954 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$\therefore \log 785{\cdot}9 = 2{\cdot}8954.$

(3) 0·07859 ರ ಲಘುಗಣಕವನ್ನು ತಿಳಿಸಿರಿ.

ಇದರ ಅಪೂರ್ಣಾಂಕ ಭಾಗದ ಮೊದಲನೆಯ ಅಂಕ 7. ಅದರ ಹಿಂದೆ ಒಂದು ಸೊನ್ನೆ ಇದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಲಕ್ಷಣಾಂಶವು $\bar{2}$. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಂತೆಯೇ ಈ ಲಘುಗಣಕದ ದಶಮಾಂಶವೂ 0·8954 ಆಗಿರಬೇಕು.

$\therefore \log_{10} 0{\cdot}07859 = \bar{2}{\cdot}8954.$

3.6 ವಿರುದ್ಧ ಲಘುಗಣಕ ಕೋಷ್ಟಕವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ವಿಧಾನ ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) 4·3521 ಲಘುಗಣಕದ ವಿರುದ್ಧ ಲಘುಗಣಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಲಘುಗಣಕದ ಲಕ್ಷಣಾಂಶವು 4. ಆದ್ದರಿಂದ, ವಿರುದ್ಧ ಲಘುಗಣಕದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು $4 + 1 = 5$ ಅಂಕಗಳಿರಬೇಕು. ಈಗ ವಿರುದ್ಧ ಲಘುಗಣಕದ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ 0·35 ರ ಸಾಲಿನ 2 ನೇ ಅಂಕಣದಲ್ಲಿ 2249 ಸೂಚಿತವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಇದೇ ಸಾಲಿನ ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳ ಕೆಳಗೆ 1 ನೇ ಅಂಕಣದಲ್ಲಿ 1 ಸೂಚಿತವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $2249 + 1 = 2250$ ಬರುತ್ತದೆ.

ಆದರೆ, ವಿರುದ್ಧ ಲಘುಗಣಕದಲ್ಲಿ 5 ಅಂಕಗಳಿರಬೇಕು.

$\therefore$ 4·3521 ರ ವಿರುದ್ಧ ಲಘುಗಣಕವು 22500.

(2) $\bar{3}{\cdot}3521$ ರ ವಿರುದ್ಧ ಲಘುಗಣಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಲಕ್ಷಣಾಂಶವು $\bar{3}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ವಿರುದ್ಧ ಲಘುಗಣಕದಲ್ಲಿ ಚಿಹ್ನೆಗೆ ಅನುಗೂಡಿ 2 ಸೊನ್ನೆ ಇರಬೇಕು. ದಶಮಾಂಶ ಭಾಗವು ಹಿಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಯದೇ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ವಿರುದ್ಧ ಲಘುಗಣಕದ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ ನಮಗೆ 2250 ಬರುತ್ತದೆ.

$\therefore$ $\bar{3}{\cdot}3521$ ರ ವಿರುದ್ಧ ಲಘುಗಣಕ $= 0{\cdot}002250$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರಿ : $\dfrac{49\cdot52 \times (75\cdot32)^{3/2}}{5\cdot427}$

$N = \dfrac{49\cdot52 \times (75\cdot32)^{3/2}}{5\cdot427}$ ಆಗಿರಲಿ.

$\log N = \log(49\cdot52) + \log(75\cdot32)^{3/2} - \log(5\cdot427)$

$= \log(49\cdot52) + \dfrac{3}{2}\log(75\cdot32) - \log(5\cdot427)$

$= 1\cdot6948 + \dfrac{3}{2} \times 1\cdot8769 - 0\cdot7346$ [ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ]

$= 1\cdot6948 + 2\cdot8154 - 0\cdot7346$

$= 4\cdot5102 - 0\cdot7346$

$= 3\cdot7756$

$\therefore N = 3\cdot7756$ ರ ವಿರುದ್ಧ ಲಘುಗಣಕ $= 5965$

(2) ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರಿ : $\left[\dfrac{0\cdot09523 \times \sqrt{7\cdot851}}{(1\cdot123)^2 \times 1\cdot257}\right]^1$

$N = \left[\dfrac{0\cdot09523 \times \sqrt{7\cdot851}}{(1\cdot123)^2 \times 1\cdot257}\right]^{1/6}$ ಆಗಿರಲಿ.

$\log N = \frac{1}{6}\log\left[\dfrac{0\cdot09523 \times \sqrt{7\cdot851}}{(1\cdot123)^2 \times 1\cdot257}\right]$

$= \frac{1}{6}\left[\{\log(0\cdot09523) + \log(7\cdot851)^{1/2}\} - \{\log(1\cdot123)^2 + \log 1\cdot257\}\right]$

$= \frac{1}{6}\left[\{\log(0\cdot09523) + \frac{1}{2}\log 7\cdot851\} - \{2\log(1\cdot123) + \log 1\cdot257\}\right]$

$= \frac{1}{6}\left[\{\bar{2}\cdot9787 + \frac{1}{2}(0\cdot8950)\} - \{2\,(0\cdot0503) + 0\cdot0993\}\right]$

$= \frac{1}{6}\left[\{\bar{2}\cdot9787 + 0\cdot4475\} - \{0\cdot1006 + 0\cdot0993\}\right]$

$= \frac{1}{6}\left[\bar{1}\cdot4262 - 0\cdot1999\right]$

$= \frac{1}{6}\left[\bar{1}\cdot2263\right]$

$= \frac{1}{6}\left[\bar{6} + 5\cdot2263\right]$

$= \left[\bar{1} + 0\cdot87105\right]$

$= \bar{1}\cdot 8711$

$\therefore$ N $= \bar{1}\cdot 8711$ ರ ವಿರುದ್ಧ ಲಘುಗಣಕ $= 0\cdot 7432$.

(3) ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರಿ : $\dfrac{(0\cdot 0372)^{1/5} + (78\cdot 531)^{1/2}}{20\cdot 5}$

$$N = \frac{(0\cdot 0372)^{1/5} + (78\cdot 531)^{1/2}}{20\cdot 5}$$

ಮತ್ತು $u = (0\cdot 0372)^{1/5}$, $v = (78\cdot 531)^{1/2}$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore N = \frac{u+v}{20\cdot 5}$$

ಈಗ $u = (0\cdot 0372)^{1/5}$ ಮತ್ತು $v = (78\cdot 531)^{1/2}$

$\therefore \log u = \frac{1}{5}\log(0\cdot 0372)$ ಮತ್ತು $\log v = \frac{1}{2}\log(78\cdot 531)$

$= \frac{1}{5}(\bar{2}\cdot 5705)$, $\qquad = \frac{1}{2}(1\cdot 8951)$

$= \frac{1}{5}[\bar{5} + 3\cdot 5705]$

$= \bar{1}\cdot 7141 \qquad = 0\cdot 9476$

$\therefore u = \bar{1}\cdot 7141$ ರ ವಿರುದ್ಧ ಲಘುಗಣಕ, ಮತ್ತು $v = 0\cdot 9476$ ವಿರುದ್ಧ ಲಘು.

$\therefore u = 0\cdot 5177$ ಮತ್ತು $v = 8\cdot 863$

$u + v = 0\cdot 5177 + 8\cdot 863 = 9\cdot 3807$

$$\therefore N = \frac{9\cdot 3807}{20\cdot 5}$$

$\log N = \log(9\cdot 3807) - \log(20\cdot 5)$

$= 0\cdot 9722 - 1\cdot 3118$

$= \bar{1}\cdot 6604$

$\therefore$ N $= \bar{1}\cdot 6604$ ರ ವಿರುದ್ಧ ಲಘುಗಣಕ

$= 0\cdot 4575$,

3·7 ಲಘುಗಣಕಗಳ ಆಧಾರಗಳ ಬದಲಾವಣೆ (Change of base)

$\log_a N = x$ ಆಗಿರಲಿ.

$N = a^x$

$$\therefore \log_b N = \log_b a^x = x \log_b a$$

$$\therefore x = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, N ಸಂಖ್ಯೆಯ 'a' ಆಧಾರವನ್ನು 'b' ಗೆ ಬದಲಾವಣೆ ಮಾಡಿದಾಗ $\log_b N$ ಯನ್ನು $\log_b a$ ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕು.

$N = b$ ಆದರೆ,

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\therefore \log_b a \cdot \log_a b = 1.$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರಿ: $\dfrac{\log_5 7}{\log_3 4} - \dfrac{\log_4 3}{\log_7 5}$

ಎಲ್ಲಾ ಲಘುಗಣಕಗಳ ಆಧಾರವನ್ನೂ 3 ಕ್ಕೆ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೆ,

$$\frac{\log_5 7}{\log_3 4} - \frac{\log_4 3}{\log_7 5} = \frac{\left(\dfrac{\log_3 7}{\log_3 5}\right)}{\log_3 4} - \frac{\left(\dfrac{\log_3 3}{\log_3 4}\right)}{\left(\dfrac{\log_3 5}{\log_3 7}\right)}$$

$$= \frac{\log_3 7}{\log_3 5 \log_3 4} - \frac{\log_3 7}{\log_3 5 \log_3 4}$$

$= ೧$

(2) $\dfrac{\log_y x^3}{\log_z y^3} + \dfrac{\log_z y^3}{\log_x z^3} + \dfrac{\log_x z^3}{\log_y x^3}$

$= \log_y x \cdot \log_y z + \log_z y \cdot \log_z x + \log_x z \cdot \log_x y$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

$$\text{ಎಡಭಾಗ} = \frac{\log_y x^3}{\log_z y^3} + \frac{\log_z y^3}{\log_x z^3} + \frac{\log_x z^3}{\log_y x^3}$$

$$= \frac{3 \log_y x}{3 \log_z y} + \frac{3 \log_z y}{3 \log_x z} + \frac{3 \log_x z}{3 \log_y x}$$

$$= \frac{\log_y x}{\log_z y} + \frac{\log_z y}{\log_x z} + \frac{\log_x z}{\log_y x}$$

$$= \frac{\log_y x}{\left(\frac{\log_y y}{\log_y z}\right)} + \frac{\log_z y}{\left(\frac{\log_z z}{\log_z x}\right)} + \frac{\log_x z}{\left(\frac{\log_x x}{\log_x y}\right)}$$

$$= \frac{\log_y x \cdot \log_y z}{\log_y y} + \frac{\log_z y \cdot \log_z x}{\log_z z} + \frac{\log_x z \cdot \log_x y}{\log_x x}$$

$$= \log_y x \cdot \log_y z + \log_z y \cdot \log_z x + \log_x z \cdot \log_x y \quad [\because \log_a a = 1]$$

$=$ ಬಲಭಾಗ

3.8 ಸಹಜ ಲಘುಗಣಾಂಕಗಳು (Natural logarithms)

ಲಘುಗಣಕದ ಆಧಾರವು e $[e = 2 \cdot 7183]$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಲಘುಗಣಾಂಕವನ್ನು ಸಹಜ ಲಘುಗಣಾಂಕವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಆಧಾರಗಳ ಬದಲಾವಣೆಯ ನಿಯಮದಿಂದ ಸಹಜ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಲಘುಗಣಾಂಕಗಳಿಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

$$\log_e N = \frac{\log_{10} N}{\log_{10} e}$$

$$\therefore \log_{10} N = \log_e N \times \log_{10} e$$

$$= \log_e N \times 0 \cdot 4343 \quad [\because \log_{10} e = 0 \cdot 4343]$$

$$\therefore \log_{10} N = \log_e N \times 0 \cdot 4343$$

ಅಂದರೆ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಲಘುಗಣಾಂಕವು $0 \cdot 4343$ ಮತ್ತು ಸಹಜ ಲಘುಗಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3 (ಆ)

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಲೆಕ್ಕಗಳ ಲಕ್ಷಣಾಂಶಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.

(i) $\log 5435$ (ii) $\log 35000$ (iii) $\log 0 \cdot 0521$ (iv) $\log 0 \cdot 5321$
(v) $\log 0 \cdot 000031$ (vi) $\log 939 \cdot 321$

2. $\log_{\sqrt{a}} 2401$ ರ ಬೆಲೆಯೇನು?

3. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಲೆಕ್ಕಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\dfrac{683 \cdot 7 \times 0 \cdot 0521}{32 \cdot 57}$ (ii) $\dfrac{(78 \cdot 41)^3 \times \sqrt{142 \cdot 3}}{\sqrt[4]{0 \cdot 1562}}$

(iii) $\dfrac{(58 \cdot 72)^4 \times (0 \cdot 00827)^2 \times 0 \cdot 5321}{562 \cdot 7 \times (28 \cdot 13)^6}$

(iv) $\dfrac{\sqrt[3]{7 \cdot 21} \times 4 \cdot 0321}{20 \cdot 236 \times (0 \cdot 573)^3}$ (v) $\sqrt[4]{0 \cdot 0000467}$

(vi) $\dfrac{667 \cdot 571 \times \sqrt{2 \cdot 161}}{121 \cdot 73}$ (vii) $\dfrac{(268 \cdot 23)^{1/4} \times (5 \cdot 021)^{1/3}}{(95 \cdot 321)^2 - (40 \cdot 58)^2}$

(viii) $\dfrac{\sqrt[3]{23 \cdot 125} \times \sqrt{0 \cdot 0125}}{\sqrt{570 \cdot 5} + (280)^{1/3}}$ (ix) $\dfrac{\sqrt[3]{2312} + \sqrt[3]{0 \cdot 0572}}{332 \cdot 6}$

(x) $\sqrt{27 \cdot 57} - \sqrt[3]{33 \cdot 712}$ (xi) $\dfrac{(27 \cdot 321)^2 - \sqrt{53 \cdot 32}}{92 \cdot 571 - \sqrt[3]{152 \cdot 125}}$

(xii) $\dfrac{69 \cdot 56 \times \sin 36° \, 14'}{24 \cdot 69}$ (xiii) $\dfrac{29 \cdot 25 \times \cos 25° \, 17'}{\tan 50° \, 3'}$

(xiv) $\dfrac{59 \cdot 27 \times \sin 27° \, 18'}{\tan 45° \, 17'}$ (xv) $\dfrac{69 \cdot 275 \times \cos 45° \, 18'}{\sin 85° \, 10'}$

4. ಸಾಮಾನ್ಯ ಲೋಲಕದ ಅವಧಿ (Period) $T = 2\pi \sqrt{l/g}$ [l = ಲೋಲಕದ ಉದ್ದ, g = ಗುರುತ್ವಾಕರ್ಷ (acceleration due to gravity) ಆದರೆ,

(i) $l = 281 \cdot 3$, ಸೆಂ. ಮೀ. $g = 981$ ಸೆಂ. ಮೀ. / ಸೆಕೆಂಡ್^{2}, $2\pi = 6 \cdot 283$, $T = ?$

(ii) $l = 98$ ಸೆಂ. ಮೀ., $g = 980$ ಸೆಂ. ಮೀ./ಸೆಕೆಂಡ್^{2}, $\pi = 3 \cdot 14$, $T = ?$

(iii) $l = 112$ ಸೆಂ.ಮೀ., $g = 980$ ಸೆಂ. ಮೀ./ಸೆಕೆಂಡ್^{2}, $T = ?$

(iv) $T = 3$ ಸೆಕೆಂಡ್‌ಗಳು, $g = 980$ ಸೆಂ.ಮೀ / ಸೆಕೆಂಡ್^{2}, $l = ?$

5. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(i) $50^x = 7$ (ii) $3^x = 1000$ (iii) $10^x + 10^{-x} = 2$

(iv) $10^{x+2} \cdot 100^{x+2} = 50$ (v) $5^{2x} \cdot 2^{5y} = 10$, $2^{5x} \cdot 5^{2y} = 100$

(vi) $3^{2x} \cdot 2^{3y} = 5$. $2^{3x} \cdot 3^{2y} = 8$

ಅಧ್ಯಾಯ 4

ಪ್ರಮಾಣ, ಅನುಪಾತ ಮತ್ತು ಮಾರ್ಪು

ಪ್ರಮಾಣ

4·1 ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ನಿತ್ಯಜೀವನದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಸ್ತುವನ್ನು ಮತ್ತೊಂದರೊಡನೆ ಹೋಲಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ, ಆ ಹೋಲಿಕೆಯು ಸಜಾತೀಯ ವಸ್ತುಗಳದ್ದಾಗಿದ್ದು, ಆ ವಸ್ತುಗಳು ಏಕಮಾನ (Unit of measurement) ದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಅವುಗಳ ತೌಲ್ಯಮಾಪನ ಮಾಡುವುದರಲ್ಲಿ ಯಶಸ್ವಿಯಾಗುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆಯೇ, ಎರಡು ಪರಿಮಾಣಗಳು **ಸಜಾತೀಯ**ವಾಗಿದ್ದು, ಏಕಮಾನದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ನಾವು ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಏಕಮಾನದಲ್ಲಿರುವ ದೂರದ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನಾಗಲೀ, ಕಾಲದ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನಾಗಲೀ, ಉಷ್ಣದ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನಾಗಲೀ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ a ಮತ್ತು b ಪರಿಮಾಣಗಳು (ಸಜಾತೀಯವಾಗಿದ್ದ ಏಕಮಾನ ದಲ್ಲಿದ್ದರೆ) ಅವುಗಳ ಪ್ರಮಾಣ a/b ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಎರಡು ಸಜಾತೀಯ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು (ಅವು ಏಕಮಾನದಲ್ಲಿದ್ದಾಗ) a ಮತ್ತು b ಎಂಬ ಅಂಕೆಗಳಿಂದ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ನಿರ್ದೇಶಿಸುವುದು ಸಾಧ್ಯವಾದಲ್ಲಿ, a/b ಯ ಭಾಗಲಬ್ಧ (Quotient)ವು, A ಮತ್ತು B ಯ **ಪ್ರಮಾಣ**ವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

(1) ಆವರಣವಿರಾಮ (Colon) ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ; ಉದಾಹರಣೆಗೆ $a : b$

(2) ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಿಂದ; ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 2/3

(3) ದಶಮಾಂಶ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಿಂದ ; ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 0.53

(4) ಶೇಕಡದಂತೆ; ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 25%

4.2 ಪ್ರಮಾಣದ ಮೂಲತತ್ವಗಳು :

(1) ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಪರಿಮಾಣಗಳ **ಪ್ರಮಾಣ** ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದರೆ ಅವು ಸಜಾತೀಯವಾಗಿದ್ದು, ಏಕಮಾನದಲ್ಲಿರಬೇಕು.

(2) ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕೆ ಯಾವ ರೀತಿಯ ಅಳತೆಯ **ಏಕಮಾನ**ವೂ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

(3) ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟುಮಟ್ಟಿಗೂ ಸುಲಭ ರೂಪದಲ್ಲಿಡಬೇಕು ಮತ್ತು ಅದು ಯಾವಾಗಲೂ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಿಂದ ಹೊರತಾಗಿರಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ (a) 20 ಮತ್ತು 30 ರ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು 2:3 ಎಂದು ಸುಲಭ ರೂಪದಲ್ಲಿಡಬೇಕು. (b) $2\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 5 : 1$ ಎಂದು ಬರೆಯಬೇಕು.

(4) ಮೂರು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ಪರಿಮಾಣಗಳ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಅಖಂಡ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಉದಾ. : 2 : 3 ; 3 : 4 ; 4 : 2. ಮೂರು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು "2 : 3 : 4" ಎಂಬ ಅಖಂಡ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬರೆಯ ಬಹುದು.

ಈಗ ನಾವು ದತ್ತ ಪರಿಮಾಣಗಳ ಪ್ರಮಾಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಬಗೆಯನ್ನು ತಿಳಿಯೋಣ :

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) $2x$ ಮತ್ತು $5x$ ಪರಿಮಾಣಗಳ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$2x : 5x = \frac{2x}{5x} = 2/5 = 2 : 5$$

(2) πD ಮತ್ತು πd ಪರಿಮಾಣಗಳ ಪ್ರಮಾಣವೇನು ?

$$\pi D : \pi d = \frac{\pi D}{\pi d} = \frac{D}{d} = D : d$$

(3) 38 : 76 ಎಂಬ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಸುಲಭ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

$$38 : 76 = \frac{38}{76} = \frac{1}{2}$$

(4) 48 : 144 ಈ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಸುಲಭ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

$$48 : 144 = \frac{48}{144} = \frac{1}{3}$$

(5) $(a^3 - b^3) : (a - b)^3$ ಎಂಬ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಸುಲಭ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

$$(a^3 - b^3) : (a - b)^3 = \frac{(a^3 - b^3)}{(a - b)^3}$$

$$= \frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2)}{(a - b)(a - b)^2}$$

$$= \left[\frac{a^2 + ab + b^2}{(a - b)^2}\right]$$

(6) $x^2 - 7xy - 9y^2 = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $y:x$ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$x^2 - 7xy - 9y^2 = 0 \ldots\ldots(1)$$

ಸಮೀಕರಣ (1) ನ್ನು $-x^2$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರೆದರೆ, $\frac{9y^2}{x^2} + \frac{7y}{x} - 1 = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$$\therefore \frac{y}{x} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 36}}{18} = \frac{-7 \pm \sqrt{85}}{18}$$

(7) $3x^2 + xy - y^2 = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $x:y$ ಪ್ರಮಾಣವೇನು ?

$$3x^2 + xy - y^2 = 0 \ldots\ldots(1)$$

(1) ನೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು y^2 ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, $\frac{3x^2}{y^2} + \frac{x}{y} - 1 = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 12}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

4.3 ಸಮ ಮತ್ತು ಅಸಮ ಪ್ರಮಾಣಗಳು

ಪ್ರಮಾಣಗಳಲ್ಲಿ ಸಮ ಮತ್ತು ಅಸಮ ಪ್ರಮಾಣಗಳೆಂದು ಎರಡು ಬಗೆಗಳಿವೆ. a/b, c/d, e/f, g/h......ಮುಂತಾದ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ ಅವನ್ನು **ಸಮ ಪ್ರಮಾಣ**ಗಳೆಂದೂ ಅವು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮನಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ **ಅಸಮ ಪ್ರಮಾಣ**ಗಳೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇವುಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಎರಡು ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಪ್ರಮೇಯ (1) a/b, c/d, e/f,......ಮುಂತಾದ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಅಸಮವಾಗಿದ್ದು, b, d, f, ... ಮುಂತಾದವುಗಳು ಧನ ಪರಿಮಾಣಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, $\left[\frac{a + c + e + \ldots.}{b + d + f + \ldots.}\right]$ ಎಂಬುದು ದತ್ತ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಮತ್ತು ಅತಿ ಕಡಿಮೆ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ : a/b ಪ್ರಮಾಣವು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರಮಾಣಗಳಲ್ಲಿ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚಿನದಾಗಿರಲಿ. x ಎಂಬುದು ಅತಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರಮಾಣವಾಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $a/b = x.$

ಅಂದರೆ, $a = bx \ldots\ldots\ldots\ldots(i)$

$c/d < x$

ಅಂದರೆ, $c < dx \ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$

ಹಾಗೆಯೇ $e < fx \ldots\ldots\ldots\ldots(iii)$

(i), (ii) ಮತ್ತು (iii) ನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ,

$a + c + e + \ldots < (b + d + f + \ldots\ldots)\,x$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$$\therefore \frac{(a + c + e + \ldots\ldots)}{(b + d + f + \ldots\ldots)} < x \ldots(1)$$

ಈಗ, e/f ಅತಿ ಕಡಿಮೆ ಪ್ರಮಾಣವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು y ಅತಿ ಕಡಿಮೆ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲಿ.

ಆಗ, $e/f = y$

ಅಂದರೆ, $e = fy \ldots\ldots\ldots\ldots(iv)$

$a/b > y$

ಅಂದರೆ, $a > by \ldots\ldots\ldots\ldots(v)$

ಹಾಗೆಯೇ, $c > dy \ldots\ldots\ldots\ldots(vi)$

(iv), (v) ಮತ್ತು (vi) ನ್ನು ಕೂಡುವುದರಿಂದ

$a + c + e + \ldots > (b + d + f + \ldots\ldots)\,y$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$$\therefore \left(\frac{a + c + e + \ldots\ldots}{b + d + f + \ldots\ldots}\right) > y \ldots\ldots(2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ಇವುಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದರೆ, $\dfrac{a + c + e + \ldots}{b + d + f + \ldots}$, x ಮತ್ತು y ಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ (2) $a/b = c/d = e/f = \ldots\ldots\ldots$ ಆದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಮಾಣವೂ $\left[\dfrac{pa^n + qc^n + re^n + \ldots\ldots}{pb^n + qd^n + rf^n + \ldots\ldots}\right]^{1/n}$ ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ. $p, q, r, \ldots\ldots$ ಮುಂತಾದಾವು ಎಲ್ಲವೂ ಮತ್ತು n ಕೂಡ ಶೂನ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮವಲ್ಲವಾದರೆ ಮಾತ್ರ ಈ ಪ್ರಮೇಯ ನೈಜವಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f} = \ldots\ldots = k$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $a = bk,\ c = dk,\ e = fk, \ldots.$

ಇವುಗಳನ್ನು n ಘಾತಕ್ಕೆ ಏರಿಸಿದರೆ,

$a^n = b^n k^n$

$c^n = d^n k^n$

$e^n = f^n k^n$

....

....

........ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ, $\left[\dfrac{pa^n + qc^n + re^n + \ldots\ldots}{pb^n + qd^n + rf^n + \ldots\ldots}\right]^{1/n}$ ಎಂಬಲ್ಲಿ $a^n, c^n, e^n, \ldots$ ಮುಂತಾದವುಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

$$\left[\frac{pa^n + qc^n + re^n + \ldots}{pb^n + qd^n + rf^n + \ldots}\right]^{1/n} = (k^n)^{1/n}\left[\frac{pb^n + qd^n + rf^n + \ldots}{pb^n + qd^n + rf^n + \ldots}\right]^{1/n}$$

$$= k^{n/n}$$

$$= k$$

$$= \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \ldots\ldots$$

ಈ ರೀತಿಯ ಸಾಧನೆಯನ್ನು **k ರೀತಿಯ ಸಾಧನೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇದು ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಬಹಳವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಇದರ ಕ್ರಮದ ಬಗ್ಗೆ ವಿಶೇಷ ಗಮನವಿಡುವುದು ಅವಶ್ಯಕ.

ಈಗ ಈ ಮೇಲ್ಕಂಡ ಪ್ರಮೇಯಗಳ ಕೆಲವು ಅನುಮಿತಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯೋಣ.

ಅನುಮಿತ 1. ಅನೇಕ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಅಂಶಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳ ಮೊತ್ತದ ಪ್ರಮಾಣವು ಪ್ರತಿ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕೂ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, $a/b = c/d = e/f = \ldots\ldots$ ಆದರೆ ಆಗ ಪ್ರತಿ ಪ್ರಮಾಣವೂ $\dfrac{a+c+e+\ldots}{b+d+f+\ldots}$ ಗೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅನುಮಿತ 2. $n = 1$ ಆದರೆ ಪ್ರತಿ ಪ್ರಮಾಣವೂ, $\dfrac{pa + qc + re + \ldots}{pb + qd + rf + \ldots}$ ಗೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈಗ k ರೀತಿಯಿಂದ ಬಿಡಿಸುವ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

(1) $a:b = 7:3$ ಆದರೆ $(7a - 9b):(2a + 3b)$ ಯ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{7}{3} = k$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $a = 7k,\ b = 3k$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$$\therefore \left(\frac{7a - 9b}{2a + 3b}\right) = \frac{\{\,7(7) - 9(3)\,\}\,k}{\{\,2(7) + 3(3)\,\}\,k}$$

$$= \frac{49 - 27}{14 + 9}$$

$$= \left(\frac{22}{23}\right)$$

(2) $a:b = 9:5$ ಆದರೆ $(2ab^2 + 3ba^2):(a^3 + b^3)$ ರ ಪ್ರಮಾಣ ವೇನು ?

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{9}{5}$ (ದತ್ತ)

ಅಂದರೆ, $\dfrac{a}{9} = \dfrac{b}{5}$

$\dfrac{a}{9} = \dfrac{b}{5} = k$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ,

$a = 9k,\ b = 5k$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$$\therefore \left(\frac{2ab^2 + 3ba^2}{a^3 + b^3}\right) = \frac{2(9k)(5k)^2 + 3(5k)(9k)^2}{(9k)^3 + (5k)^3}$$

$$= \frac{(450 + 1215)\,k^3}{(729 + 125)\,k^3}$$

$$= \left(\frac{1665}{854}\right)$$

(3) $\dfrac{x}{a^2} = \dfrac{y}{b^2} = \dfrac{z}{c^2}$ ಆದರೆ,

$\dfrac{x + y + z}{a^2 + b^2 + c^2} = \dfrac{ax + by + cz}{a^3 + b^3 + c^3}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಸಾಧನೆ: $\frac{x}{a^2} = \frac{y}{b^2} = \frac{z}{c^2} = k$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ,

$x = ka^2, \quad y = kb^2, \quad z = kc^2$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ ಸಾಧನೀಯದ ಎಡಭಾಗ,

$$\frac{x + y + z}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{ka^2 + kb^2 + kc^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$= k \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ಸಾಧನೀಯದ ಬಲಭಾಗ,

$$\frac{ax + by + cz}{a^3 + b^3 + c^3} = \frac{a(ka^2) + b(kb^2) + c(kc^2)}{a^3 + b^3 + c^3}$$

$$= k \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದರೆ,

ಎಡಭಾಗ = ಬಲಭಾಗ

(4) ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ 1 ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಅವುಗಳ ಪ್ರಮಾಣವು 1 : 2 ಆಗುತ್ತದೆ. ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ 5 ನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಅವುಗಳ ಪ್ರಮಾಣವು 5 : 11 ಆಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು?

a ಮತ್ತು b ಗಳು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಈಗ, 1ನ್ನು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸೇರಿಸಿದರೆ,

$(a + 1) : (b + 1) = 1 : 2$

ಅಂದರೆ, $2(a + 1) = 1(b + 1)$

$\therefore 2a - b = -1 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ 5ನ್ನು ಕಳೆದರೆ,

$(a - 5) : (b - 5) = 5 : 11$

ಅಂದರೆ, $11(a - 5) = 5(b - 5)$

$\therefore 11a - 5b = 30 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

(1) ಮತ್ತು (2) ನೇ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರೆ,

$a = 35$ ಮತ್ತು $b = 71$

ಅಭ್ಯಾಸ 4 (ಅ)

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಸುಲಭ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ.

(i) 48 : 64 (ii) 102 : 68 (iii) 174 : 406

2. $a : b = 3 : 8$ ಮತ್ತು $c : d = 2 : 5$ ಆದರೆ, ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $3a : 8b$ (ii) $\frac{a}{d} : \frac{b^2}{c}$ (iii) $ad^2 : bc^2$ (iv) $\frac{4}{a} : \frac{3}{b}$

3. $\frac{x+2y-z}{3a-b} = \frac{y+2z-x}{3b-c} = \frac{z+2x-y}{3c-a}$ ಆದರೆ, ಪ್ರತಿ ಪ್ರಮಾಣವೂ $\frac{x+y+z}{a+b+c}$ ಗೆ ಸಮ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

4. $\frac{l}{b-c} = \frac{m}{c-a} = \frac{n}{a-b}$ ಆದರೆ, $l + m + n = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

5. $2x = 3y$ ಆದರೆ $(2x^2 + 2xy + 3y^2) : (4x^2 - 6xy + 5y^2)$ ನ ಬೆಲೆ ಏನು ?

6. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 5 : 6 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ 9ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಅವುಗಳ ಪ್ರಮಾಣವು 8 : 9 ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯಾವುವು ?

7. ರಾಮು ಮತ್ತು ಭೀಮು ಇವರ ವಯಸ್ಸು 3 : 4 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿದೆ. 4 ವರ್ಷಗಳ ನಂತರ ಅವರ ವಯಸ್ಸಿನ ಪ್ರಮಾಣ 7 : 9 ಆದರೆ ಅವರುಗಳ ವಯಸ್ಸೆಷ್ಟು ?

8. ತಾಮ್ರ ಮತ್ತು ತವರದ ಎರಡು ಮಿಶ್ರಲೋಹಗಳಿಂದ ಸಮ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ತಾಮ್ರ ಮತ್ತು ತವರದ ಪ್ರಮಾಣ ಮೊದಲನೆಯದರಲ್ಲಿ 9 : 2 ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದರಲ್ಲಿ 19 : 3 ಇದೆ. ಪರಿಮಾಣ ಹೆಚ್ಚು ಕಡಿಮೆಯಾಗದಂತೆ ಆ ಎರಡು ಮಿಶ್ರಲೋಹಗಳನ್ನೂ ಒಂದುಗೂಡಿಸಿದರೆ ಉಂಟಾಗುವ ಹೊಸ ಮಿಶ್ರಲೋಹದಲ್ಲಿ ತಾಮ್ರ ಮತ್ತು ತವರದ ಪ್ರಮಾಣವೇನು ?

9. ಒಂದು ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿರುವ ಹುಡುಗರ ಮತ್ತು ಹುಡುಗಿಯರ ಪ್ರಮಾಣವು 3 : 4 ಇದೆ. ಕೆಲವು ಕಾಲದ ಬಳಿಕ ಆ ಶಾಲೆಗೆ 20 ಜನ ಹುಡುಗರು ಸೇರಿದಾಗ ಆ ಪ್ರಮಾಣವು 7 : 4 ಆದರೆ, ಆ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿದ್ದ ಹುಡುಗರ ಮತ್ತು ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ?

10. ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ $y : x$ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $2x^2 - 5xy - 9y^2 = 0$ (ii) $11x^2 + 9xy - 2y^2 = 0$

11. ಒಬ್ಬನು ತನ್ನ ಉಯಿಲಿನಲ್ಲಿ ಹೆಂಡತಿಯ ಹೆಸರಿಗೆ 20,000 ರೂಪಾಯಿಗಳನ್ನೂ ಮಗನ ಹೆಸರಿಗೆ 12,000 ರೂ.ಗಳನ್ನೂ ಬರೆದಿದ್ದನು. ಅವನು ಸತ್ತಾಗ ಅವನ ಆಸ್ತಿಯ ಬೆಲೆಯು 16,400 ರೂ. ನಷ್ಟಿತ್ತು. ನ್ಯಾಯಾಲಯವು ಆ ಆಸ್ತಿಯನ್ನು ಉಯಿಲಿನಲ್ಲಿ ನಮೂದಿಸಿದ ಹಣಗಳ ಪ್ರಮಾಣದಂತೆ ಅವನ ಹೆಂಡತಿ ಮತ್ತು ಮಗನಿಗೆ ಹಂಚಿದರೆ ಅವರುಗಳಿಗೆ ತಲಾ ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು ಹಣ ದೊರಕುತ್ತದೆ?

12. ಶಂಕರ ಮತ್ತು ಗೋವಿಂದನ ಹಣದ ಪ್ರಮಾಣ 5 : 2. ಶಂಕರನು ಗೋವಿಂದನಿಗೆ 24 ರೂ. ಕೊಟ್ಟರೆ ಅವರಿಬ್ಬರ ಬಳಿಯಿರುವ ಹಣದ ಪ್ರಮಾಣ ಸಮನಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಅವರೀರ್ವರ ಬಳಿ ಇದ್ದ ಹಣವೆಷ್ಟು?

13. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆ 81 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅದರ ಭುಜಗಳ ಪ್ರಮಾಣ 4 : 3 : 2 ಆದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜದ ಉದ್ದವೆಷ್ಟು?

14. ಒಂದು ವಿದ್ಯಾ ಸಂಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ 2 : 3 : 4 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಹಿಂದುಳಿದ, ಪರಿಶಿಷ್ಟ ಮತ್ತು ಗಿರಿವಾಸಿ ಜನಾಂಗಗಳಿಗೆ ಸ್ಥಳಾವಕಾಶವನ್ನು ಕಾದಿಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ. ಅಲ್ಲಿ ದೊರಕುವ ಒಟ್ಟು ಸ್ಥಳ 120. ಈ ಪ್ರಮಾಣವು ಶೇಕಡಾ 60 ಸ್ಥಳಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಿದರೆ, ಆ ಜನಾಂಗಗಳವರು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಪಡೆಯುವ ಕಾದಿರಿಸಿದ ಸ್ಥಳಗಳೆಷ್ಟು?

ಅನುಪಾತ

4.4 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ :

a, b, c, d ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ಗಹನ ಪರಿಮಾಣಗಳಲ್ಲಿ, a ಮತ್ತು b ಪ್ರಮಾಣವು, c ಮತ್ತು d ಯ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, a, b, c, d ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು **ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದೆ** ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

4.5 ಅನುಪಾತದ ಮೂಲ ತತ್ವಗಳು

(1) a, b, c, d ಗಳು ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, d ಯನ್ನು ಚತುರ್ಥಾನುಪಾತಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(2) $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} \ldots\ldots$ ಎಂಬ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ a, b, c, d, e,...... ಮುಂತಾದ ಪರಿಮಾಣಗಳು ಇದ್ದ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ, a, b, c, d, e, ಮುಂತಾದುವನ್ನು **ಅಖಂಡಾನುಪಾತ** ಅಥವಾ **ಅಧಿಗತಾನುಪಾತ**ದಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

(3) a, b, c ಎಂಬ ಮೂರು ಪರಿಮಾಣಗಳು ಅಖಂಡಾನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, c ಯನ್ನು **ತೃತೀಯಾನುಪಾತಿ** ಎಂದೂ, b ಯನ್ನು **ಮಧ್ಯಾನುಪಾತಿ** ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಎಂದರೆ, $a : b = b : c$

$\therefore b^2 = a c$

ಅಥವಾ $b = \sqrt{ac}$

(4) a, b, c, d ಎಂಬ ಪರಿಮಾಣಗಳು ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ a ಮತ್ತು d ಯನ್ನು **ಆದ್ಯಂತಾನುಪಾತಿಗಳೆಂದೂ** b ಮತ್ತು c ಯನ್ನು **ಮಧ್ಯಾನುಪಾತಿ**ಗಳೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಂಡನಂತರ ಅನುಪಾತದ ಕೆಲವು ತತ್ವಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸೋಣ.

ತತ್ವ 1 ವಜ್ರಗುಣನ ಸೂತ್ರ: a, b, c, d ಪರಿಮಾಣಗಳು $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಆದ್ಯಂತಾನುಪಾತಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಮಧ್ಯಾನುಪಾತಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, $a d = b c$

ಸಾಧನೆ: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (ದತ್ತ)

ಇದರ ಎರಡು ಕಡೆಗಳನ್ನೂ bd ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ,

$$\frac{a}{b} \times bd = \frac{c}{d} \times bd$$

ಅಂದರೆ, $ad = cb$

$\therefore ad = bc$

ತತ್ವ 2: a, b, c, d ಪರಿಮಾಣಗಳು $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ

(1) $\frac{b}{a} = \frac{c}{d}$

ಸಾಧನೆ : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (ದತ್ತ)

ಇದರ ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನೂ ac ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ

$\frac{1}{bc} = \frac{1}{da}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಇದರ ಎರಡು ಕಡೆಗಳನ್ನೂ bd ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ,

$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ ಆಗುತ್ತದೆ. (ಇದನ್ನು 'ಇನ್‌ವರ್ಟೆಂಡೊ' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.)

(2) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$,

ಸಾಧನೆ : $ad = bc$ (ತತ್ವ 1)

ಇದರ ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನೂ ad ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ ಆಗುತ್ತದೆ. (ಇದನ್ನು 'ಆಲ್ಟರ್‌ನೆಂಡೋ' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.)

(3) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

ಸಾಧನೆ: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ಯ ಎರಡು ಕಡೆಗಳಿಗೂ 1ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ,

$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$\therefore \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ (ಇದನ್ನು 'ಕಾಂಪೊನೆಂಡೋ' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.)

(4) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

ಸಾಧನೆ: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ಯ ಎರಡು ಕಡೆಗಳಿಗೂ (-1) ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ,

$\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$

$\therefore \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ (ಇದನ್ನು 'ಡಿವಿಡೆಂಡೊ' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.)

(5) $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$

ಸಾಧನೆ: (3) ನ್ನು (4) ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,

$$\frac{a+b}{b}\div\frac{a-b}{b}=\frac{c+d}{d}\div\frac{c-d}{d}$$

$\therefore \dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$ (ಇದನ್ನು 'ಕಾಂಪೊನೆಂಡೊ ಎಟ್ ಡಿವಿಡೆಂಡೊ' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ).

ಟಿಪ್ಪಣಿ: ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳ ಹೆಸರನ್ನು ಜ್ಞಾಪಕವಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಲೇಬೇಕೆಂಬ ನಿಯಮವಿಲ್ಲ ಇದರಲ್ಲಿ (1) ಮತ್ತು (2) ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ಬಹಳವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ. ಆದರೆ, (3) ಮತ್ತು (4) ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು, ಸಮೀಕರಣಗಳು ಮತ್ತು ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ, ಅದೂ ಅಪರೂಪವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು:

(1) $(3-x):(x+1)=2:1$ ಆದರೆ x ನ ಬೆಲೆಯೇನು?

$(3-x):(x+1)=2:1$

ವಜ್ರಗುಣನ ಸೂತ್ರದಿಂದ ;

$(3-x)\ (1)=(x+1)\ (2)$

$3-x=2x+2$

$3x=1$

$\therefore\ x=\frac{1}{3}$

(2) $(2x+3):6=(x+5):2$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ವಜ್ರಗುಣನ ಸೂತ್ರದಿಂದ,

$(2x+3)\ (2)=6\,(x+5)$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, $4x+6=6x+30$

$\therefore\ 2x=-24$

ಅಥವಾ $x=-12$

(3) ಚತುರ್ಥಾನುಪಾತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(i) 12, 9, 32 (ii) ab, bc, cd

(i) $12:9 = 32:x$

$12 \times x = 32 \times 9$

$\therefore x =$ ಚತುರ್ಥಾನುಪಾತಿ $= \dfrac{32 \times 9}{12} = 24$

(ii) $ab:bc = cd:x$

$ab \times x = bc \times cd$

$\therefore x =$ ಚತುರ್ಥಾನುಪಾತಿ $= \dfrac{bc \times cd}{ab} = \dfrac{c^2}{a}$

(4) a^2b^4, a^4b^2 ಇವುಗಳ ಮಧ್ಯಾನುಪಾತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$a^2 b^4 : x = x : a^4 b^2$

$x^2 = a^6 b^6$

$\therefore x = \pm a^3 b^3$

(5) 2 ಮತ್ತು 8 ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಧ್ಯಾನುಪಾತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$2 : x = x : 8$

$\therefore x^2 = 2 \times 8$

$\therefore x = \sqrt{16} = 4$

(6) 2, 3 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ತೃತೀಯಾನುಪಾತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$2:3 = 3:x$

$\therefore 2 \times x = 3 \times 3$

$\therefore x = \frac{9}{2}$

(7) $a^2 b^4$ ಮತ್ತು a^4b^2 ಗಳು ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ತೃತೀಯಾನುಪಾತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$a^2 b^4 : a^4 b^2 = a^4 b^2 : x$

$\therefore a^2 b^4 \times x = (a^4 b^2)(a^4 b^2)$

ಅಂದರೆ, $x =$ ತೃತೀಯಾನುಪಾತಿ $= \dfrac{a^4 b^2 \times a^4 b^2}{a^2 b^4} = a^6$

(8) $a : b : c = 3 : 1 : 4$ ಮತ್ತು $-2a + 3b + c = 34$ **ಆದರೆ** a, b, c **ಗಳ** ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅನುಪಾತವೂ k ಗೆ ಸಮನಾಗಿರುವುದೆಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$\therefore\ a = 3k,\ b = k,\ c = 4k$

ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

$-2(3k) + 3(k) + 4(k) = 34$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$\therefore\ k = 34$

$\therefore\ a = 3(34) = 102$

$b = k = 34$

$c = 4(34) = 136$

(9) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ ಆದರೆ $\dfrac{a^2 + 3b^2}{a^2 - ab + b^2} = \dfrac{c^2 + 3d^2}{c^2 - cd + d^2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಸಾಧನೆ: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = k$ ಆಗಿರಲಿ

$\therefore\ a = bk,\ c = dk$

$$\therefore\ \frac{a^2 + 3b^2}{a^2 - ab + b^2} = \frac{k^2 b^2 + 3b^2}{b^2 k^2 - b^2 k + b^2}$$

$$= \left(\frac{k^2 + 3}{k^2 - k + 1}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ಹಾಗೆಯೇ, $\dfrac{c^2 + 3d^2}{c^2 - cd + d^2} = \dfrac{(k^2 + 3)\, d^2}{(k^2 - k + 1)\, d^2}$

$$= \left(\frac{k^2 + 3}{k^2 - k + 1}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

(i) ಮತ್ತು (ii) ನ್ನು ಹೋಲಿಸುವುದರಿಂದ,

ಎಡಪಾರ್ಶ್ವ = ಬಲಪಾರ್ಶ್ವ

(10) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ಆದರೆ $\frac{la + mb}{pa + qb} = \frac{lc + md}{pc + qd}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಸಾಧನೆ : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ ಆಗಿರಲಿ

$\therefore a = bk, \ c = dk$

$$\frac{la + mb}{pa + qb} = \left(\frac{lk + m}{pk + q}\right)\frac{b}{b}$$

$$= \left(\frac{lk + m}{pk + q}\right) \ldots\ldots\ldots (i)$$

ಹಾಗೆಯೇ, $\frac{lc + md}{pc + qd} = \left(\frac{lk + m}{pk + q}\right)\frac{d}{d}$

$$= \frac{lk + m}{pk + q} \ldots\ldots\ldots (ii)$$

(i) ಮತ್ತು (ii) ನ್ನು ಹೋಲಿಸುವುದರಿಂದ,

ಎಡಪಾರ್ಶ್ವ = ಬಲಪಾರ್ಶ್ವ.

(ii) $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$ ಆದರೆ

$\frac{x + y + z}{a + b + c} = \frac{lx + my + nz}{la + mb + nc} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2 + b^2 + c^2}} = k$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$$

$\therefore x = ak, \ y = bk, \ z = ck$

$$\therefore \frac{x + y + z}{a + b + c} = \frac{(a + b + c)k}{(a + b + c)} = k \ldots\ldots\ldots (1)$$

ಹಾಗೆಯೇ, $\frac{lx + my + nz}{la + mb + nc} = \frac{(la + mb + nc)k}{(la + mb + nc)} = k \ldots\ldots\ldots (2)$

ಮತ್ತು $\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2 + b^2 + c^2}} = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 + c^2)k^2}{(a^2 + b^2 + c^2)}} = k \ldots\ldots\ldots (3)$

(1), (2) ಮತ್ತು (3) ಇವುಗಳಿಂದ

$$\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{lx+my+nz}{la+mb+nc}=\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}}=k \text{ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 4 (ಅ)

1. ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅನುಪಾತಗಳ ತೃತೀಯಾನುಪಾತಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) 4, 3 (ii) 3, 9 (iii) $\sqrt{ab}$, ab (iv) a^2, b (v) $3a^2$, $4a$.

2. ಇವುಗಳ ಚತುರ್ಥಾನುಪಾತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) 5, 6, 7 (ii) 3, 5, 7 (iii) $4a$, $3a^2$, $2\sqrt{a}$ (iv) a^3b^2, a^2b^3, $a^{-2}b^{-2}$.

3. ಇವುಗಳ ಮಧ್ಯಾನುಪಾತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) a^2b^4, a^4b^2, (ii) $9a^2b$, $25b^3$, (iii) 8, 32, (iv) 4, 5, (v) 2, 9.

4. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ ಆದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪ್ರಮಾಣವೂ $\sqrt{\frac{la^2+mc^2+ne^2}{lb^2+md^2+nf^2}}$ ಗೆ ಸಮ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ ಮತ್ತು $\frac{a^3}{b^2}+\frac{c^3}{d^2}+\frac{e^3}{f^2}=\frac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

5. $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$ ಆದರೆ, $\sqrt{\frac{ab+bc-ca}{bc+cd-db}}=\sqrt[3]{\frac{a}{d}}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

6. $\frac{x+y+z}{a}=\frac{x+y-z}{b}=\frac{y+z-x}{c}=\frac{z+x-y}{d}$ ಆದರೆ $a=b+c+d$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

7. $\frac{a}{b}$ ಮತ್ತು $\frac{c}{d}$ ಅಸಮಾನುಪಾತಿಗಳಾದಾಗ, $\frac{a+xc}{b+xd}$ ಯು ಅಸಮಾನುಪಾತಿಗಳ ಮೊತ್ತದ ಅರ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮನಾದರೆ x ನ ಬೆಲೆಯೇನು ?

8. $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ ಆದರೆ, ಎಲ್ಲಾ ಪರಿಮಾಣಗಳೂ ಧನವಾಗಿದ್ದಾಗ
$\frac{a}{b} > \frac{ma+nc}{mb+nd} > \frac{c}{d}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

9. $\frac{a}{y+z-x} = \frac{b}{z+x-y} = \frac{c}{x+y-z}$ ಆದರೆ $\Sigma(y-z)$
ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

10. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ ಆದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅನುಪಾತವೂ
$\sqrt[4]{\frac{a^3c^3 + c^2e^3 + e^3a^3}{abd^3 + cdf^3 + efb^3}}$ ಗೆ ಸಮ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

11. $a:b = b:c$ ಆದರೆ, $\sqrt{ab} + \sqrt{bc}$ ಯು $a+b$ ಮತ್ತು $b+c$ ಯ
ಮಧ್ಯಾನುಪಾತಿ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

12. ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಖಾಲಿ ಬಿಟ್ಟಿರುವ ಜಾಗಗಳನ್ನು ಸರಿಯಾದ ಪರಿಮಾಣ ಗಳಿಂದ ಭರ್ತಿ ಮಾಡಿರಿ.

(i) $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{x+y}{\ldots} = \frac{x-y}{\ldots}$

(ii) $\frac{2a}{9b} = \frac{3c}{4d} = \frac{16ad+2bc}{\ldots} = \frac{9ad-8bc}{\ldots}$

13. $\frac{a-b}{b-c} = \frac{x-y}{y-z} = \frac{d-e}{e-f}$ ಆದರೆ, $\frac{ay-bx}{bz-cy} = \frac{ex-dy}{fy-ez}$
$= \frac{ae-bd}{bf-ce}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

14. $\frac{2x+y}{a+b} = \frac{2y+z}{b+c} = \frac{2z+x}{c+a}$ ಆದಾಗ,

$\frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{2}{9}\left[\frac{\Sigma(3y+2x+z)}{\Sigma a}\right]$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

15. $\frac{y+z}{pb+qc} = \frac{z+x}{pc+qa} = \frac{x+y}{pa+qb}$ ಆದರೆ,
$\frac{2(x+y+z)}{a+b+c} = \frac{(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z}{ab+bc+ca}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಮಾರ್ಪು

4.6 ನಮಗೆ ಇದುವರೆಗೆ ಪರಿಮಾಣಗಳ ಪರಿಚಯ ಸಾಕಷ್ಟಾಗಿದೆ. ಈ ಪರಿಮಾಣಗಳಲ್ಲಿ **ಚರ** ಮತ್ತು **ಸ್ಥಿರ ಪರಿಮಾಣ**ಗಳೆಂಬ ಎರಡು ಬಗೆ ಇದೆ.

ಚರ ಪರಿಮಾಣಕ್ಕೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಬೆಲೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಅದಕ್ಕೆ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯಾಗಣ (Set of numbers) ದ ಯಾವ ಬೆಲೆಯನ್ನಾದರೂ ಆದೇಶಿಸಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ x, y, z ಗಳೆಂಬ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಿಸುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $y^2 = 4x$. ಇಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಗಳಿಗೆ ಯಾವುದೇ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಬೆಲೆಯೂ ಇಲ್ಲ. x ಬೆಲೆ 1 ಆದರೆ y ಬೆಲೆ 2 ಆಗುತ್ತದೆ. x ಬೆಲೆ 4 ಆದರೆ y ಬೆಲೆ 4 ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ x, y ಗಳು ಚರ ಪರಿಮಾಣಗಳು.

ಆದರೆ **ಸ್ಥಿರ ಪರಿಮಾಣಕ್ಕೆ** ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಬೆಲೆ ಇದ್ದು ಅದು ಯಾವ ಕಾರಣದಿಂದಲೂ ಬದಲಾಯಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಇದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದಲ್ಲಿ k ಎಂಬ ಅಕ್ಷರವು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. k ಯನ್ನು **ನಿಯತಾಂಕ** ಅಥವಾ **ನಿಯತಪದ** ವೆಂದೂ ಸಹ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\pi, e, 5, 3$ ಮುಂತಾದ ಪರಿಮಾಣಗಳ ಬೆಲೆಯು ಯಾವ ಕಾರಣದಿಂದಲೂ ಬದಲಾಯಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವು ಸ್ಥಿರ ಪರಿಮಾಣಗಳು.

ಇಷ್ಟು ತಿಳಿದ ಒಳಿಕ ಮಾರ್ಪನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸಲು ಅನುಕೂಲವಾಗುತ್ತದೆ. ಮಾರ್ಪಿನಲ್ಲಿ ಮೂರು ಬಗೆಗಳಿವೆ. **(1) ಸರಳ ಮಾರ್ಪು, (2) ವಿಲೋಮ ಮಾರ್ಪು, (3) ಅವಿಭಕ್ತ ಮಾರ್ಪು.** ಮಾರ್ಪನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು 'α' ಎಂಬ ಸಂಜ್ಞೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

4.7 ಸರಳ ಮಾರ್ಪು

x ಮತ್ತು y ಚರಗಳಲ್ಲಿ y ನ ಬೆಲೆಯ ಮತ್ತು x ನ ಅನುಗುಣ ಬೆಲೆಯ ಪ್ರಮಾಣವೂ ನಿಯತಾಂಕ ಅಥವಾ ನಿಯತ ಪದವಾಗಿದ್ದರೆ **y ಯು x ನಂತೆ ಮಾರ್ಪಡುತ್ತದೆ** ಅಥವಾ **y ಯು x ನೊಂದಿಗೆ ಸರಳಾನುಪಾತದಲ್ಲಿದೆ** ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಇದಕ್ಕೆ **ಸರಳ ಮಾರ್ಪು** ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಸರಳಮಾರ್ಪನ್ನು $y/x = k$ {k ನಿಯತಾಂಕವಾದಾಗ} ಅಥವಾ $y = kx$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

4.8 ಸರಳಮಾರ್ಪಿನ ನಿಯಮಗಳು

ನಿಯಮ (1) : $y = kx$ ಆದರೆ, x ಮತ್ತು y ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸರಳಾನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, **x ಮತ್ತು y ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು**

ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ x_1 ನಿಂದ x_2 ಗೆ ಮತ್ತು y_1 ಇಂದ y_2 ಗೆ ಮಾರ್ಪಟ್ಟರೆ $\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ನಿಯಮ (2) : $y = kx$ ಆದಾಗ x ಅಥವಾ y ನಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದನ್ನು ಒಂದು ಬೆಲೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಇನ್ನೊಂದನ್ನೂ ಅದೇ ಬೆಲೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $y = kx$ ನಲ್ಲಿ x ಅನ್ನು 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ y ಅನ್ನೂ 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು ಮತ್ತು x ಅನ್ನು 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ y ಅನ್ನೂ 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕು. x ಅನ್ನು 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ, $2y = 2kx$ ಎಂದಾಗುವುದು. x ಅನ್ನು 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ $\frac{y}{2} = \frac{kx}{2}$ ಎಂದಾಗುವುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) $x \propto y$ ಮತ್ತು $x = 3$ ಆದರೆ $y = 2$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದ $y = 4$ ಆದಾಗ x ನ ಬೆಲೆಯೇನು?

$x \propto y$ (ದತ್ತ)

$\therefore\ x = ky \ldots\ldots(1)$

$x = 3$ ಮತ್ತು $y = 2$ ಆದಾಗ,

$3 = k(2)$

$\therefore\ k = \frac{3}{2}$

$y = 4$ ಮತ್ತು $k = 3/2$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

$x = \left(\frac{3}{2}\right)(4)$

$\therefore\ x = 6$ ಆಗುತ್ತದೆ.

(2) $x + y \propto x - y$ ಆದರೆ $x^2 + y^2 \propto xy$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಸಾಧನೆ : $x + y \propto x - y$ (ದತ್ತ)

$\therefore\ x + y = k(x - y)$

ಎರಡೂ ಭಾಗಗಳ ವರ್ಗವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$(x + y)^2 = (k)^2 (x - y)^2$

ಎಂದರೆ, $x^2 + 2xy + y^2 = k^2(x^2 - 2xy + y^2)$

ಎಂದರೆ, $(x^2 + y^2)\ (1 - k^2) = xy(-2k^2 - 1)$

$$\therefore\ (x^2 + y^2) = \left(\frac{-2k^2 - 1}{1 - k^2}\right) \cdot xy$$

$=$ ನಿಯತಾಂಕ. xy

$\therefore\ (x^2 + y^2) \propto xy$

4.9 ವಿಲೋಮ ಮಾರ್ಪು

x ಮತ್ತು y ಚರಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ, xy ಗುಣಲಬ್ಧವು ನಿಯತವಿದ ಅಥವಾ ನಿಯತಾಂಕವಾಗಿದ್ದರೆ, x ಮತ್ತು y ಅನ್ನು **ವಿಲೋಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ** ಅಥವಾ **ವಿಲೋಮವಾಗಿ ಮಾರ್ಪುಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಇದನ್ನು, $x \propto \frac{1}{y}$ ಅಥವಾ $x = \frac{k}{y}$ {k ನಿಯತಾಂಕವಾದಾಗ} ಅಥವಾ $xy = k$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಬಾಯ್ಲನ ನಿಯಮ (Boyle's law) :

ಉಷ್ಣ (T) ಯು ಸ್ಥಿರವಾಗಿದ್ದಾಗ, ಅನಿಲದ ಒತ್ತಡ (P) ಮತ್ತು ಘನ ಪರಿಮಾಣ (V) ಯ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಯಾವಾಗಲೂ ನಿಯತಾಂಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, PV = RT [R ಸಹ ಒಂದು ನಿಯತಾಂಕ.]

R ಮತ್ತು T ಗಳು ನಿಯಂತಾಂಕವಾದ್ದರಿಂದ, ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು K ಎಂಬ ನಿಯತಾಂಕಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರಲಿ. ಆಗ,

$$PV = K$$

ಅಂದರೆ, $P = K \cdot \frac{1}{V}$

ಅಥವಾ $V = K \cdot \frac{1}{P}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

4.10 ವಿಲೋಮಾನುಪಾತದ ನಿಯಮಗಳು

ನಿಯಮ (1) : $xy = k$ ಆದರೆ, x, y ಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ವಿಲೋಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ, $x \propto \frac{1}{y}$ ಅಥವಾ $y \propto \frac{1}{x}$. ಅಂದರೆ "x ಮತ್ತು y ನ

ಬೆಲೆಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ x_1 ಯಿಂದ x_2 ಗೆ ಮತ್ತು y_1 ಯಿಂದ y_2 ಗೆ ಮಾರ್ಪು ಗೊಂಡರೆ, $\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_1}{y_2}$ ಅಥವಾ $\frac{y_2}{y_1}=\frac{x_1}{x_2}$" ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ನಿಯಮ (2) : $xy = k$ ಆದಾಗ, x ಅಥವಾ y ಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದನ್ನು ಒಂದು ಅಂಕದಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ, ಮತ್ತೊಂದನ್ನು ಅದೇ ಅಂಕದಿಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, x ಅನ್ನು 2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ, y ಅನ್ನು 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕು. $y=\frac{k}{x}$ ಅನ್ನುವುದು $\frac{y}{2}=\frac{k}{2x}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ, x ಅಥವಾ y ಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಅಂಕದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಮತ್ತೊಂದನ್ನು ಅದೇ ಅಂಕದಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) $x \propto \frac{1}{y}$ ಮತ್ತು $x = 2$ ಆದಾಗ $y = 3$ ಆದರೆ, $y = 2$ ಆದಾಗ x ನ ಬೆಲೆಯೇನು ?

$$x=\frac{k}{y} \ldots\ldots\ldots(1)$$

$x = 2,\ y = 3,$ ಆದಾಗ,

$$2=\frac{k}{3}$$

$$\therefore\ k = 6$$

$y = 2$ ಮತ್ತು $k = 6$ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (1) ಕ್ಕೆ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ $x = 6\cdot\frac{1}{2} = 3$ ಆಗುತ್ತದೆ.

(2) $(c+d)$ ಯು $\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$ ಯ ಜೊತೆ ವಿಲೋಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $(c^2+d^2) \propto cd$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಸಾಧನೆ : $(c+d) \propto \dfrac{1}{\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)}$

ಅಂದರೆ, $(c+d) \propto \dfrac{cd}{c+d}$

ಅಥವಾ, $(c + d)(c + d) = kcd$ (k = ನಿಯತಾಂಕ)

$\therefore c^2 + 2cd + d^2 - kcd = 0$

$\therefore c^2 + d^2 = (k - 2)\, cd$

$\therefore c^2 + d^2 =$ (ನಿಯತಾಂಕ)$\cdot cd$

$= k_1 \cdot cd$

ಅಂದರೆ, $(c^2 + d^2) = k_1 \cdot cd$

$\therefore (c^2 + d^2) \propto cd$

4.11 ಅವಿಭಕ್ತ ಮಾರ್ಪು

x, y, z ಚರಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿರಿ.

ಅದರಲ್ಲಿ y ಸ್ಥಿರವಾದಾಗ, $x \propto z$ ಮತ್ತು z ಸ್ಥಿರವಾದಾಗ, $x \propto y$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ, z, y ಎರಡೂ ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ, $x \propto yz$ ಅಥವಾ $x = kyz$ [k = ನಿಯತಾಂಕ] ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನು **ಅವಿಭಕ್ತಮಾರ್ಪು** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಸಾಧನೆ : $x \propto y$ [z ಸ್ಥಿರವಾದಾಗ]
$x \propto z$ [y ಸ್ಥಿರವಾದಾಗ] } ದತ್ತ

* z ಗೆ c_1 ಎಂಬ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆ ಕೊಟ್ಟರೆ, $x = kz$ (y ಸ್ಥಿರವಾದಾಗ) ನಲ್ಲಿ ನಿಯತಾಂಕ k ಗೆ ಸಹ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಬೆಲೆ ಸಹಜವಾಗಿ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $b_1\, c_1$ ಎಂಬ y ಮತ್ತು z ನ ಪ್ರತಿ ಜೊತೆ ಬೆಲೆಗೂ x ನ a_1 ಎಂಬ ಬೆಲೆ ಸಹಜವಾಗಿ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಈಗ ನಾವು x, y, z ಗೆ 3 ಜೊತೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡೋಣ :

$a_1,\ b_1,\ c_1$..........(i)

$a^1,\ b_1,\ c_2$..........(ii)

$a_2,\ b_2,\ c_2$..........(iii) *

(i) ಮತ್ತು (ii) ಜೊತೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಅವಲೋಕಿಸಿದರೆ y ನ ಬೆಲೆ ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಆದರೆ, y ಸ್ಥಿರವಾದಾಗ $x \propto z$ (ದತ್ತ)

$\therefore \frac{a_1}{a^1} = \frac{c_1}{c_2}$ .... (1) [ಸರಳಮಾರ್ಪಿನ ನಿಯಮ (1)]

ಹಾಗೆಯೇ (ii) ಮತ್ತು (iii) ನೆಯ ಜೊತೆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಅವಲೋಕಿಸಿದರೆ z ನ ಬೆಲೆ ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಆದರೆ, z ಸ್ಥಿರವಾದಾಗ, $x \propto y$ (ದತ್ತ)

$\therefore \frac{a^1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ ....(2) [ಸರಳಮಾರ್ಪಿನ 1 ನೆಯ ನಿಯಮ]

(1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಗುಣಿಸಿದರೆ, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1 c_1}{b_2 c_2}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದರೆ, $(a_1, a_2) = x$ ನ ಬೆಲೆಯೂ, (b_1, c_1), (b_2, c_2) y ಮತ್ತು z ಗಳ ಬೆಲೆಗಳೂ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

$\therefore x \propto yz$ ಅಥವಾ $x = kyz$ [k ನಿಯತಾಂಕವಾದಾಗ]

** ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆಯೂ ಬರೆಯಬಹುದು: x, y, z ಗಳಿಗೆ a_1, b_1, c_1, ಎಂಬ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸೋಣ. y ಬೆಲೆ ಸ್ಥಿರವಾಗಿದ್ದಾಗ x ನ ಬೆಲೆ a_1 ಯಿಂದ a^1 ಗೂ z ನ ಬೆಲೆ c_1 ಇಂದ c_2 ಗೂ ಮಾರ್ಪಡಲಿ. ಮತ್ತು ಆನಂತರ z ಸ್ಥಿರವಾದಾಗ, x ನ ಬೆಲೆ a^1 ನಿಂದ a_2 ಗೂ y ನ ಬೆಲೆ b_1 ನಿಂದ b_2 ಗೂ ಮಾರ್ಪಡಲಿ. ಆಗ ಈ ಮೂರು ಜೊತೆ ಬೆಲೆಗಳು ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ : (a_1, b_1, c_1), (a^1, b_1, c_2) ಮತ್ತು (a_2, b_2, c_2)

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) **ಕಂಬೈನ್ಡ್ ಗ್ಯಾಸ್ ಲಾ (Combined gas law)**: ಬಾಯ್ಲ್ ಮತ್ತು ಚಾರ್ಲ್ಸ್ ಇವರುಗಳ ನಿಯಮದ ಒಂದುಗೂಡಿಕೆಯೇ **ಕಂಬೈನ್ಡ್ ಗ್ಯಾಸ್ ಲಾ.**

ಬಾಯ್ಲನ ನಿಯಮ, ಒತ್ತಡ (P) $\propto$ $\frac{1}{\text{ಘನಪರಿಮಾಣ (V)}}$ (ಉಷ್ಣ ಸ್ಥಿರ ವಾದಾಗ)

ಚಾರ್ಲ್ಸ್‌ನ ನಿಯಮ, ಒತ್ತಡ (P) $\propto$ ಉಷ್ಣ (T) (ಘನಪರಿಮಾಣ ಸ್ಥಿರ ವಾದಾಗ)

ಕಂಬೈನ್ಡ್ ಗ್ಯಾಸ್ ಲಾ, ಒತ್ತಡ (P) $\propto$ $\frac{\text{ಉಷ್ಣ (T)}}{\text{ಘನ ಪರಿಮಾಣ (V)}}$

(ಉಷ್ಣ ಘನಪರಿಮಾಣ, ಮತ್ತು ಒತ್ತಡಗಳೆಲ್ಲವೂ ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ)

P ಯನ್ನು x ನಿಂದ, T ಯನ್ನು y ನಿಂದ, $\frac{1}{V}$ ಯನ್ನು z ನಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಿಸಿದರೆ, $x \propto yz$ (ಅವಿಭಕ್ತ ಮಾರ್ಪು) ಎಂದು ಕಂಬೈನ್ಡ್ ಗ್ಯಾಸ್ ಲಾವನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು.

(2) ಭೂಮಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯ ವರ್ಗಮೂಲದಂತೆಯೂ ಮತ್ತು ಅದರ ಒಂದು ಪಾರ್ಶ್ವದ ದ್ವಿಘಾತದಂತೆಯೂ ಮಾರ್ಪಡುತ್ತದೆ. ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 100 ಚದರ ಅಡಿಗಳಾದಾಗ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವದ ಅಳತೆಗಳು 900 ಅಡಿ ಮತ್ತು 60 ಅಡಿ ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಭೂಮಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವದ ಅಳತೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 50 ಚದರ ಅಡಿ ಮತ್ತು 25 ಅಡಿಗಳಾದಾಗ ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

A, L, ಮತ್ತು ρ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಆ ಭೂಮಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ, ಪಾರ್ಶ್ವದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಸುತ್ತಳತೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲಿ. ಆಗ,

$A \propto \sqrt{\rho}$ ಮತ್ತು $A \propto L^2$

ಅಂದರೆ, $A \propto \sqrt{\rho}.L^2$

ಅಥವಾ $A = KL^2\sqrt{\rho}$ [K = ನಿಯತಾಂಕ]

$A = 100$, $\rho = 900$, $L = 60$ ಆದಾಗ,

$$\frac{1}{K} = \frac{L^2\sqrt{\rho}}{A} = \frac{60 \times 60 \times \sqrt{900}}{100} = 1080$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $A = 50$, $L = 25$ ಮತ್ತು $\frac{1}{K} = 1080$ ಆದಾಗ,

$$\sqrt{\rho} = \frac{A}{KL^2} \text{ ಅಥವಾ } \rho = \frac{A^2}{K^2L^4}$$

$$\therefore \rho = \frac{50 \times 50 \times 1080 \times 1080}{25 \times 25 \times 25 \times 25} = 76{\cdot}64 \text{ ಅಡಿಗಳು}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 4 (ಇ)

1. x ಮತ್ತು y ಸರಳಾನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದು $x = \sqrt{2}$ ಆದಾಗ $y = 1$ ಆದರೆ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $y = \sqrt{2}$ (ii) $y = \sqrt{8}$ (iii) $y = 3$, (iv) $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(v) $y = \frac{1}{b\sqrt{8}}$

2. x ಮತ್ತು y ಗಳು ವಿಲೋಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ. $x = \sqrt{ab}$ ಆದಾಗ $y = b\sqrt{a}$ ಆದರೆ $y = b^2a^2$ ಆದಾಗ x ನ ಬೆಲೆ ಏನು?

3. x ಮತ್ತು y ಗಳು ವಿಲೋಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ, $x = 3$ ಆದಾಗ $y = 4$ ಆದರೆ, ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $y = 6$, (ii) $y^2 + 2 = 3$, (iii) $\frac{y}{2} = a$, (iv) $8y = 3$.

(v) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4. A ಮತ್ತು B^2 ಗಳು ಸರಳಾನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದು, A ಮತ್ತು C ಗಳು ವಿಲೋಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ. $A = 12$ ಆದಾಗ $B = 2$ ಮತ್ತು $C = 3$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ $A = \frac{225}{7}$ ಮತ್ತು $B = 5$ ಆದಾಗ C ಯ ಬೆಲೆಯೇನು?

5. $x \propto y$ ಮತ್ತು $y \propto z$ ಆದರೆ, $x \propto z$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

6. $(x + y) \propto (x - y)$ ಆದರೆ $(x^2 + xy + y^2) \propto (x^2 - xy + y^2)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

7. $y \propto a + b, a \propto x^2$ ಮತ್ತು $b \propto \frac{1}{x}$ ಆದಾಗ $x = 1$ ಆದರೆ $y = 4$ ಮತ್ತು $x = 5$ ಆದರೆ $y = 75{\cdot}2$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ $x = 2$ ಆದಾಗ y ನ ಬೆಲೆ ಏನು?

8. $ax - by \propto \sqrt{xy}$ ಆದರೆ $a^2 x^2 + b^2 y^2 \propto xy$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

9. $x \propto y$ ಆದಾಗ $x^2 + y^2 \, a \, x^2 - y^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

10. ಚಿನ್ನದ ಬೆಲೆಯು ಬೆಳ್ಳಿಯ ಬೆಲೆಯ ವರ್ಗಮೂಲದೊಂದಿಗೆ ಸರಳವಾಗಿಯೂ, ಪ್ಲಾಟಿನಂನ ಬೆಲೆಯೊಂದಿಗೆ ವಿಲೋಮವಾಗಿಯೂ ಪೂರ್ವಡಂತ್ತದೆ. ಚಿನ್ನದ ಬೆಲೆ 10 ಗ್ರಾಂಗೆ ರೂ. 160 ಇದ್ದಾಗ ಬೆಳ್ಳಿ ಮತ್ತು ಪ್ಲಾಟಿನಂ ಬೆಲೆಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ರೂ. 25 ಮತ್ತು ರೂ. 420 ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಚಿನ್ನದ ಮತ್ತು ಬೆಳ್ಳಿಯ ಬೆಲೆಗಳು 10 ಗ್ರಾಂಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ರೂ. 175 ಮತ್ತು ರೂ. 36 ಇದ್ದಾಗ ಪ್ಲಾಟಿನಂ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

11. ಒಂದು ಕನ್ನಡಿಯಿಂದ ಉಂಟಾದ ಪ್ರತಿಬಿಂಬದ ದೂರವನ್ನೂ ಮತ್ತು ಕಾರಕ ವಸ್ತು (object) ವಿನ ದೂರವನ್ನೂ ಯಾವುದೋ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಅಳೆದಾಗ ಆ ದೂರಗಳ ಮೊತ್ತವು, ಆ ದೂರಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದಂತೆ ಮಾರ್ಪಡುವುದಾಗಿ ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ. ವಸ್ತುವಿನ ದೂರವು 30 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದಾಗ ಪ್ರತಿಬಿಂಬದ ದೂರವು 12 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ವಸ್ತುವಿನ ದೂರ 54 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದಾಗ ಪ್ರತಿಬಿಂಬದ ದೂರವೆಷ್ಟು?

12. ಒಂದು ಭೂಮಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯ ವರ್ಗಮೂಲದಂತೆ ಮತ್ತು ಅದರ ಒಂದು ಪಾರ್ಶ್ವದ ದ್ವಿಘಾತದಂತೆಯೂ ಮಾರ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 240 ಚ. ಗಜಗಳಾದಾಗ, ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವದ ಅಳತೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 14400 ಗಜ ಮತ್ತು 20 ಗಜ ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಭೂಮಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮತ್ತು ಪಾರ್ಶ್ವಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 160 ಚ. ಗಜ ಮತ್ತು 12 ಗಜ ಗಳಾದಾಗ ಆ ಭೂಮಿಯ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟು?

13. ವಾಯುವಿನ ಒತ್ತಡವು, ಉಷ್ಣವು ನಿಯತಾಂಕವಾದಾಗ, ಅದರ ಘನ ಪರಿಮಾಣದೊಡನೆ ವಿಲೋಮವಾಗಿ ಮಾರ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಒತ್ತಡವು 35 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇದ್ದಾಗ ಘನ ಪರಿಮಾಣವು 15 ಘ. ಸೆಂ.ಮೀ. ಇರುತ್ತದೆ. ಘನಪರಿಮಾಣವು 45 ಘನ ಸೆಂ.ಮೀ. ಇದ್ದಾಗ ಒತ್ತಡದ ಪರಿಮಾಣವೆಷ್ಟು?

14. ಒಂದು ಹಾಸ್ಟೆಲಿನ ಒಟ್ಟು ಖರ್ಚು ಕೊಂಚಮಟ್ಟಿಗೆ ನಿಯತಾಂಕವಾಗಿಯೂ, ಕೊಂಚಮಟ್ಟಿಗೆ ಅಲ್ಲಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ದ್ವಿಘಾತಕ್ಕೆ ಸರಳಾನುಪಾತ ದಲ್ಲಿಯೂ ಇದೆ. ಅಲ್ಲಿ 20 ಜನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿದ್ದರೆ ರೂ. 1100 ಮತ್ತು 25 ಜನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿದ್ದರೆ ರೂ. 1325 ಆದರೆ, ಖರ್ಚು ರೂ. 1600 ಆಗಲು ಅಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಜನ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿರಬೇಕು?

15. ಒಂದು ರಬ್ಬರ್ ಕೊಳವೆಯ ಬಿಗುವು (Tension) ಅದರ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಂತೆ (Extensibility) ಮಾರ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಆ ಕೊಳವೆಯ ಉದ್ದ 60 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆ ಕೊಳವೆಗೆ 15 ಕಿ. ಗ್ರಾಂ ತೂಕದ ಕಲ್ಲನ್ನು ಕಟ್ಟಿದಾಗ ಅದರ ಉದ್ದ 75 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗುತ್ತದೆ. ಅದರ ಉದ್ದವನ್ನು 84 ಸೆಂ.ಮೀ. ಗೆ ಹೆಚ್ಚಿಸಲು ಬೇಕಾಗುವ ತೂಕದ ಕಲ್ಲಿನ ಭಾರವೆಷ್ಟು?

16. ಒಂದು ಎಕರೆ ಭೂಮಿಯಲ್ಲಿ ನೆಡಲು ಬೇಕಾಗುವ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ, ಆ ಗಿಡಗಳ ನೆಡುವ ಜಾಗದ ಅಂತರದ ದ್ವಿಘಾತದೊಡನೆ ವಿಲೋಮವಾಗಿ ಮಾರ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಆ ಅಂತರವು 10 ಅಡಿಗಳಾದಾಗ ಬೇಕಾಗುವ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 432. ಹಾಗಾದರೆ, (i) ಅಂತರ 15 ಅಡಿಗಳಾದಾಗ ಬೇಕಾಗುವ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಯನ್ನೂ, (ii) 108 ಗಿಡಗಳನ್ನು ನೆಟ್ಟರೆ ಅವುಗಳ ಅಂತರವನ್ನೂ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. ಒಂದು ಗಡಿಯಾರವು 60° F ನಲ್ಲಿ ಸರಿಯಾದ ವೇಳೆಯನ್ನು ತೋರಿಸು ತ್ತದೆ. ಆ ಗಡಿಯಾರದ ವೇಳೆಯು ಉಷ್ಣತಾಮಾನದೊಡನೆ ವಿಲೋಮಾನು ಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದು, ಅದು ಮುಂದೆ ಅಥವಾ ಹಿಂದೆ ಹೋಗುವುದು ದಿನದ ಉಷ್ಣತಾ ಮಾನ ಮತ್ತು 60° F ನೊಡನಿರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ದ್ವಿಘಾತದಂತೆ ಮಾರ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಉಷ್ಣತಾಮಾನವು 47° F ಆದಾಗ ದಿನಕ್ಕೆ 2 ಸೆಕೆಂಡು ಮುಂದೆ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಉಷ್ಣತಾಮಾನವು 75° F ಆದಾಗ 3 ದಿವಸದಲ್ಲಿ ಅದು ಎಷ್ಟು ಹಿಂದೆ ಹೋಗುತ್ತದೆ?

ಅಧ್ಯಾಯ 5

ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳು

5.1 ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವೆನ್ನಬೇಕಾದರೆ ಆ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿರುವ ಚರಾಕ್ಷರದ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ಘಾತವು ಎರಡಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, (1) $2x^2 + 3x - 5 = 0$

(2) $x - 7/x = 3$

ಈ ಮೇಲೆ ಉದಾಹರಿಸಿದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು **ಏಕ ಚರಾಕ್ಷರ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ** ಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಈ ಏಕ ಚರಾಕ್ಷರ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವನ್ನು $ax^2 + bx + c = 0$ ಎಂದು ಬರೆಯುವುದು ರೂಢಿಯಲ್ಲಿದೆ.

5.2 ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಬಗೆ

ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು (1) ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ, (2) ವರ್ಗಪೂರಣ ಮತ್ತು (3) ಸಂಜ್ಞಾಸೂತ್ರ ವಿಧಾನಗಳೆಂಬ ಮೂರು ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯೋಣ.

5.3 ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯಿಂದ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಕ್ರಮ:

ಒಂದು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಬೇಕಾದರೆ ಮೊದಲು ಆ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $ax^2 + bx + c = 0$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು, (1) $x + 6/x = 5$

ಇದನ್ನು x ನಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ.

$x^2 + 6 = 5x$

ಅಥವಾ $x^2 - 5x + 6 = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

(2) $x - 6 = \sqrt{x}$.

ಅಪವರ್ತಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಮುಂಚೆ ಇದರ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ತೆಗೆಯಬೇಕು.

ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಗಳನ್ನೂ ದ್ವಿಘಾತಿಸಿದರೆ,

$(x - 6)^2 = (\sqrt{x})^2$

ಅಂದರೆ, $x^2 - 12x + 36 = x$

$\therefore\ x^2 - 13x + 36 = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯಿಂದ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಕ್ರಮದ ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) $x + \frac{6}{x} = 5$

ಇದನ್ನು $ax^2 + bx + c = 0$ ಎಂಬ ರೂಪಕ್ಕೆ ತಂದರೆ,

$x^2 - 5x + 6 = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ ಅಪವರ್ತಿಸಿದರೆ,

$(x - 2)\ (x - 3) = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ,

$(x - 2) = 0$ ಅಥವಾ $(x - 3) = 0$

$\therefore x = 2$ ಅಥವಾ $x = 3$

(2) $(x - 6) = \sqrt{x}$

ದ್ವಿಘಾತಿಸುವುದರಿಂದ $ax^2 + bx + c = 0$ ಎಂಬ ರೂಪಕ್ಕೆ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತಂದರೆ,

$x^2 - 13x + 36 = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಪವರ್ತಿಸುವುದರಿಂದ,

$(x - 9)\ (x - 4) = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ,

$(x - 9) = 0$ ಅಥವಾ $(x - 4) = 0$

$\therefore x = 9$ ಅಥವಾ $x = 4$.

5·4 ವರ್ಗ ಪೂರಣದಿಂದ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಕ್ರಮ

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) $2x^2 - 2x - 3 = 0$.

x^2 ನ ಸಹಾಪವರ್ತನವಾದ 2 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು,

$x^2 - x - \frac{3}{2} = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಥವಾ $x^2 - x = \frac{3}{2}$

$\left(\frac{1}{4}\right)$ನ್ನು ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಗಳಿಗೂ ಸೇರಿಸಿದರೆ,

$x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}$

ಅಥವಾ $(x)^2 - 2\left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}$ ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

$\therefore (x - \frac{1}{2})^2 = \frac{7}{4}$

ಇವುಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$x - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{7}{4}}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, $x = \pm \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{1}{2}$

$\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$

(2) $4x^2 = 12x - 7$

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು,

$4x^2 - 12x + 7 = 0$ ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇದನ್ನು 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,

$x^2 - 3x + \frac{7}{4} = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಥವಾ $x^2 - 3x = -\frac{7}{4}$

ಈಗ $\left(\frac{9}{4}\right)$ ನ್ನು ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಗಳಿಗೂ ಸೇರಿಸಿದರೆ,

$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{-7}{4} + \frac{9}{4}$

ಅಂದರೆ, $(x)^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$$\therefore \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಗಳ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \tfrac{3}{2}$$

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2}$$

5.5 ಸಂಜ್ಞಾ ಸೂತ್ರದಿಂದ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಕ್ರಮ

$ax^2 + bx + c = 0$ ಎಂಬ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವನ್ನು $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗದಿಂದ ಬಿಡಿಸಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ $(b^2 - 4ac)$ ಎಂಬ ಅಕ್ಷರೋಕ್ತಿಯನ್ನು **ಶೋಧಕ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಮುನ್ನ, ಸೂತ್ರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನೂ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನೂ ತಿಳಿಯೋಣ.

ಯಾವುದೇ, ಒಂದು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಕೇವಲ ಎರಡೇ ಎರಡು ಮೂಲಗಳು ಇರುತ್ತವೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ನಾವು α (ಆಲ್ಫ) ಮತ್ತು β (ಬೀಟ) ಗಳೆಂದು ಕರೆಯೋಣ.

ಸಂಜ್ಞಾ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಬಗೆ

$ax^2 + bx + c = 0$..........(1) (ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣ)

ಇಲ್ಲಿ, $a \neq 0$, ಆದ್ದರಿಂದ,

x^2 ನ ಸಹಾಪವರ್ತನ "a" ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು

$x^2 + \dfrac{b}{a}(x) + \dfrac{c}{a} = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನು $x^2 + \dfrac{b}{a}(x) = -\dfrac{c}{a}$ ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇದರ ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಗಳಿಗೂ $\left(\dfrac{b^2}{4a^2}\right)$ಅನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ವರ್ಗಪೂರಣ ಮಾಡಿದರೆ,

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

ಅಥವಾ $(x)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ

ಅಂದರೆ, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಗಳಿಗೂ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$= \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$$\therefore\ x = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

α ಮತ್ತು β ಗಳು ಸಮೀಕರಣ (1) ರ ಮೂಲಗಳಾದ್ದರಿಂದ,

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ ಮತ್ತು } \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇದನ್ನು **ಶ್ರೀಧರರ ಕ್ರಮ** ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

5.6 ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವ

$ax^2 + bx + c = 0$ ಎಂಬ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ α ಮತ್ತು β ಗಳೆಂಬ ಎರಡೇ ಎರಡು ಮೂಲಗಳೆಂದೂ, $\alpha, \beta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಎಂದೂ ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ, a, b, c ಗಳನ್ನು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದೂ, $a \neq 0$ ಎಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ $b^2 - 4ac$ ಎಂಬ ಅಕ್ಷರೋಕ್ತಿಯು ಧನವಾಗಿಯೋ, ಋಣ ವಾಗಿಯೋ ಅಥವಾ ಕೆಲವು ವೇಳೆ ಶೂನ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿಯೋ ಇರಬಹುದು. ಅಕ್ಷರೋಕ್ತಿಯು ಋಣವಾದಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಊಹ್ಯವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

$(b^2 - 4ac)$ ಎಂಬ ಅಕ್ಷರೋಕ್ತಿಯು ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ಶೋಧಿಸಲು ಸಹಕರಿಸುವುದರಿಂದ ಅದನ್ನು **ಶೋಧಕ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

(1) $b^2 - 4ac = 0$ ಆದರೆ, ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವವಾಗಿಯೂ ಸಮವಾಗಿಯೂ ಇರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ, $\alpha = -\frac{b}{2a} = \beta$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

(2) $b^2 - 4ac$ ಧನವಾದರೆ, ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವವಾಗಿದ್ದು, ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, $(b^2 - 4ac)$ ಅಕ್ಷರೋಕ್ತಿಯು ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾದರೆ ಮೂಲಗಳು ಪರಿಮೇಯವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ ಅವುಗಳ ಖಚಿತ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಆದರೆ, $(b^2 - 4ac)$ ಪೂರ್ಣ ವರ್ಗವಾಗದಿದ್ದರೆ ಮೂಲಗಳು ಅಪರಿಮೇಯ ಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ ಮೂಲಗಳ ಖಚಿತ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

(3) $b^2 - 4ac$ ಋಣವಾದರೆ ಮೂಲಗಳು ಊಹ್ಯ ಅಥವಾ ಅವಾಸ್ತವಿಕ ವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಆದರೆ α ಮತ್ತು β ಗಳು ಅನುವರ್ತ ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಈ ಮೇಲ್ಕಂಡ ವಿವರಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಸಂಗ್ರಹವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು :

1. ಶೋಧಕ $= 0$, α, β ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಸಮ, $\therefore \alpha = -\frac{b}{2a} = \beta$.

2. ಶೋಧಕ > 0 α, β ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

3. ಶೋಧಕ < 0, α ಮತ್ತು β ಗಳು ಅವಾಸ್ತವಿಕ ಮತ್ತು ಅನುವರ್ತ ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಅಂದರೆ, $\alpha, \beta = \frac{-b \pm i\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ $i = \sqrt{-1}$ = ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ.

$ax^2 + bx + c = 0$ ಎಂಬ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಸಂಜ್ಞಾ ಸೂತ್ರವನ್ನೂ, ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನೂ ಸಂಗ್ರಹವಾಗಿ ಪಡೆದಂತಾಯಿತು.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಈಗ ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ತಿಳಿಯೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

1. $9x^2 + 23x + 7 = 0$..........(1)

$ax^2 + bx + c = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ, a ಯು x^2 ನ ಸಹಾಪವರ್ತನ, b ಯು x ನ ಸಹಾಪವರ್ತನ ಮತ್ತು c ಎಂಬುದು ನಿಯತಾಂಕ.

ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ,

$a = 9$, $b = 23$, $c = 7$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆಂದರೆ ಶೋಧಕದ ಬೆಲೆ,

$$b^2 - 4ac = (23)^2 - 4\,(9)\,(7)$$
$$= 529 - 252$$
$$= 277$$

ನಮಗೆ, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ಎಂದು ಗೊತ್ತಿದೆ.

$\therefore$ a, b ಮತ್ತು $(b^2 - 4ac)$ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

$x = \dfrac{-23 \pm \sqrt{277}}{2\,(9)}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$$\therefore\ x = \frac{-23 \pm \sqrt{277}}{18}$$

$\therefore\ x = \dfrac{-23 + \sqrt{277}}{18}$ ಅಥವಾ $\dfrac{-23 - \sqrt{277}}{18}$

2. $2x^2 - 2x + 1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ $a = 2$, $b = -2$, $c = 1$

$$\therefore b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\,(2)\,(1) = 4 - 8 = -4$$

$$\therefore\ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{-4}}{2\,(2)} = \frac{2 \pm i\sqrt{8 \cdot 4}}{4},$$

$$= \frac{2 \pm 2i}{4} = \frac{1 \pm i}{2}$$

$\therefore\ x = \dfrac{1 + i}{2}$ ಅಥವಾ $\dfrac{1 - i}{2}$

3. ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಶೋಧಕಗಳನ್ನು ಬರೆದು, ಆ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ:

(a) $3x^2 - 7x + 2 = 0$

(b) $ax^2 - 2ax = \dfrac{5a}{4}$

(a) $3x^2 - 7x + 2 = 0$

ಇದರ ಶೋಧಕ $(b^2 - 4ac) = 49 - 4(3)(2) = 25$

ಶೋಧಕ > 0 ಮತ್ತು ವರ್ಗಪೂರ್ಣ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವವಾಗಿಯೂ, ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿಯೂ ಇರುತ್ತವೆ. ಮೂಲಗಳಿಗೆ ಖಚಿತ ಬೆಲೆ ಸಹ ಇರುತ್ತದೆ.

(b) $ax^2 - 2ax = \frac{5a}{4}$

ಇದರ ಶೋಧಕ $(b^2 - 4ac) = (-2a)^2 - 4(a)\left(-\frac{5a}{4}\right)$

$$= 4a^2 + 5a^2$$
$$= 9a^2$$

ಶೋಧಕ $\geqslant 0$ ಮತ್ತು ವರ್ಗಪೂರ್ಣ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವವಾಗಿಯೂ, ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿಯೂ ಇರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಮೂಲಗಳಿಗೆ ಖಚಿತ ಬೆಲೆ ಸಹ ಇರುತ್ತದೆ.

5.7 ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನ

α ಮತ್ತು β ದತ್ತ ಮೂಲಗಳಾಗಿರಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮೀಕರಣವನ್ನು, $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಅಂದರೆ, $x^2 - (\alpha + \beta)\cdot x + \alpha\beta = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (1) ಎನ್ನೋಣ.

ಈಗ, $ax^2 + bx + c = 0$ ಎಂಬ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇದನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (2) ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ.

ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದರೆ,

$$-(\alpha + \beta) = \frac{b}{a} \quad \Big| \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$\therefore (\alpha + \beta) = -\frac{b}{a} \quad \Big| \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ $= -\frac{b}{a} = -\left(\frac{x \text{ ನ ಸಹಾಪವರ್ತನ}}{x^2 \text{ ನ ಸಹಾಪವರ್ತನ}}\right)$

ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= \frac{c}{a} = \left(\frac{\text{ನಿಯತಾಂಕ}}{x^2 \text{ ನ ಸಹಾಪವರ್ತನ}}\right)$

ಆದ್ದರಿಂದ, α ಮತ್ತು β ಎಂಬ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳಿಂದಾದ ಸಮೀಕರಣವು,

$x^2 -$ (ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ) $x +$ (ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ) $= 0$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) $\frac{9}{4}$ ಮತ್ತು 2 ಎಂಬುವು ಒಂದು ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾದರೆ ಆ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$\frac{9}{4}$ ಮತ್ತು 2 (ದತ್ತ ಮೂಲಗಳು)

ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ $= \frac{9}{4} + 2 = \frac{17}{4}$

ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= \frac{9}{4} \times 2 = \frac{9}{2}$

ಆದ್ದರಿಂದ ಆ ಸಮೀಕರಣವು,

$x^2 - (\frac{17}{4})\, x + \frac{9}{2} = 0$

ಅಥವಾ $4x^2 - 17x + 18 = 0$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

(2) $ax^2 + 2bx + c = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$ ಗೆ ಸಮವೆಂದು ತೋರಿಸಿ.

$ax^2 + 2bx + c = 0$..........(1) (ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣ)

x^2 ನ ಸಹಾಪವರ್ತನದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,

$x^2 + \frac{2b}{a} x + \frac{c}{a} = 0$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$\therefore\ x^2 + \frac{2b}{a} x = -\frac{c}{a}$

ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿ ವರ್ಗಪೂರ್ಣ ಮಾಡುವುದರಿಂದ,

$x^2 + \frac{2b}{a} x + \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$$\therefore \left(x+\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2-ca}{a^2}$$

$$\therefore x = -\frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2-ca}{a^2}}$$

$$= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-ca}}{a}$$

$$\therefore \alpha, \beta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-ca}}{a}$$

3. α ಮತ್ತು β ಗಳು $ax^2+bx+c=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾದರೆ $\alpha^2\beta^2$ ಮತ್ತು $(\alpha+\beta)$ ಮೂಲಗಳಿರುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ, $(\alpha+\beta) = -\frac{b}{a}$

ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

$$\therefore \alpha^2\beta^2 = \frac{c^2}{a^2}$$

$\therefore$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ

$$\alpha^2\beta^2 + (\alpha+\beta) = \frac{c^2}{a^2} - \frac{b}{a} = \frac{c^2-ba}{a^2}$$

ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ, $(\alpha^2\beta^2)(\alpha+\beta) = \frac{c^2}{a^2} \times \left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{bc^2}{a^3}$

α ಮತ್ತು β ಗಳನ್ನು ಮೂಲವಾಗುಳ್ಳ ಯಾವುದೇ ಸಮೀಕರಣವು,

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

$\therefore$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣವು [ಅಂದರೆ $\alpha^2\beta^2$ ಮತ್ತು $(\alpha+\beta)$ ಗಳನ್ನು ಮೂಲಗಳನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು]

$$x^2 - \left(\frac{c^2-ba}{a^2}\right)x + \left(-\frac{bc^2}{a^3}\right) = 0$$

ಅಥವಾ $a^3x^2-(c^2-ba)ax-bc^2=0$

ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ

4. $\frac{c^2}{a}x^2 + \frac{b^3}{a}x - \frac{a^2}{c} = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α, β ಗಳಾದರೆ, $\alpha^2 \beta^2$ ಮತ್ತು $\frac{1}{\alpha\beta}$ ಗಳನ್ನು ಮೂಲಗಳನ್ನಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದ,

$$\text{ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ} = (\alpha + \beta) = -\frac{b^3/a}{c^2/a} = \left(-\frac{b^3}{c^2}\right)$$

$$\text{ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ} = \alpha\beta = \left(-\frac{a^2}{c}\right)\Big/\left(\frac{c^2}{a}\right) = \left(-\frac{a^3}{c^3}\right)$$

$$\therefore \alpha^2\beta^2 = \left(-\frac{a^3}{c^3}\right)^2 = \frac{a^6}{c^6}$$

$$\frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{-\left(\frac{a^3}{c^3}\right)} = -\frac{c^3}{a^3}$$

$$\therefore \alpha^2\beta^2 + \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{a^6}{c^6} + \left(-\frac{c^3}{a^3}\right) = \frac{a^9 - c^9}{a^3 c^6}$$

$$(\alpha^2\beta^2)\left(\frac{1}{\alpha\beta}\right) = \alpha\beta = -\frac{a^3}{c^3}$$

ಎರಡು ಮೂಲಗಳಿರುವ ಯಾವುದೇ ಸಮೀಕರಣವು, x^2 — (ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ) x + (ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ) $= 0$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

$$\therefore x^2 - \left(\frac{a^9 - c^9}{a^3 c^6}\right)x + \left(-\frac{a^3}{c^3}\right) = 0$$

ಅಥವಾ $a^3 c^6 x^2 - (a^9 - c^9)x - a^6 c^3 = 0$
ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 5

I. ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯಿಂದ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(1) $3x^2 - 29x + 18 = 0$ (2) $6x^2 - 13x + 6 = 0$

(3) $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$ (4) $x - \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$

(5) $(2x - 1)(x + 3) + (x - 2)(3x + 1) = 0$

(6) $12x^2 - x - 63 = 0$ (7) $9x^2 - 3x - 2 = 0$

(8) $x^2 - 2x - 35 = 0$ (9) $8x^2 - 10x + 3 = 0$

(10) $x^2 + 3x + 2 = 0$

II. ವರ್ಗಪೂರಣ ವಿಧಾನದಿಂದ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(1) $3x^2 - 4x - 9 = 0$ (2) $x^2 = 2 - 3x$

(3) $9x^2 - 22x + 7 = 0$ (4) $12(1 - y^2) = 7y$

(5) $3y^2 + 2cy = 8c^2$ (6) $12x^2 + 7x - 10 = 0$

III. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಂಜ್ಞಾ ಸೂತ್ರದ **ಸಹಾಯದಿಂದ** ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(1) $9b^2x^2 - 2bx + 33 = 0$ (2) $2y^2 - 3y + k = 0$

(3) $x + \frac{1}{x} = 2$ (4) $2x^2 - x + 3 = 0$ (5) $8y^2 + 6y - 3 = 0$

(6) $10(x + 1) + \frac{10}{(x + 1)} = 29$ (7) $x^2 - 9x + 2 = 0$

(8) $x^2 + 3 = 0$ (9) $(3 - 2x) = \frac{2}{x}$ (10) $3x^2 + 2x + 1 = 0$

IV. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಶೋಧಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅವುಗಳ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ವಿವೇಚಿಸಿ.

(1) $3x^2 - 2x + 7 = 0$ (2) $4(x - a)^2 - 3(x - a) = 1$

(3) $5x^2 - 21x + 4 = 0$ (4) $ax^2 - 2ax = \frac{5a}{4}$

(5) $p^2x^2 + px + 5 = 0$ (6) $x^2 - 6x + 9 = 0$

V. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮೂಲಗಳನ್ನುಳ್ಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅವುಗಳ ಶೋಧಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(1) 4 ಮತ್ತು 5 (2) 7 ಮತ್ತು 3 (3) $3 \pm \sqrt{2}$ (4) $\frac{1 \pm i}{2}$

VI. α ಮತ್ತು β ಗಳು $3x^2 - 7x + 5 = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾದರೆ, ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮೂಲಗಳನ್ನುಳ್ಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(1) $\alpha + 2,\ \beta + 2$ (2) $\alpha^2 \beta^2,\ (\alpha + \beta)$ (3) $\alpha + \beta,\ \alpha - \beta$

(4) $\alpha^3 \beta^2,\ \beta^3 \alpha^2$ (5) $\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta}$ (6) $\alpha^2 \beta^2,\ \frac{1}{\alpha\beta}$

VII. c ಮತ್ತು d ಗಳು $x^2 + 2x + 3 = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾದರೆ (1) $\frac{1}{cd},\ c - d$ (2) $\frac{1}{c + d},\ \frac{1}{c^2 d^2}$ ಮತ್ತು (3) $(c + 3),\ (d - 3)$ ಮೂಲಗಳನ್ನುಳ್ಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

VIII. a, b ಗಳು $3x^2 + 6x + 8 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾದರೆ, (1) $a^2 + ab + b^2$, (2) $\frac{1}{ab} + a^2 b^2 + \sqrt{ab}$ ಮತ್ತು (3) $(a + b)^3 + (b - a)^2$ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಯೇನು ?

IX. p ಮತ್ತು q ಗಳು $ax^2 + bx + c = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾದರೆ (1) $p^2 + pq + q^2$ (2) $\frac{p}{q} + \frac{q}{p}$, (3) $p^3 + q^3$, (4) $\frac{1}{p} + pq + \frac{1}{q}$, (5) $pq^4 + qp^4$ — ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

X. $(n + 3)\, x^2 + 3\,(2n + 3)\, x + (7n + 11) = 0$ ಎಂಬುದರ ಮೂಲಗಳು ಸಮನಾದರೆ n ನ ಬೆಲೆಯೇನು ?

XI. a, b ಗಳು $\alpha x^2 - \beta x + \beta$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾದರೆ $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ 6

ಕ್ರಮಯೋಜನೆ ಮತ್ತು ಸಂಯೋಜನೆಗಳು (ಪ್ರಸ್ತರಣ ಮತ್ತು ವಿಕಲ್ಪ)

(PERMUTATIONS AND COMBINATIONS)

ಕ್ರಮಯೋಜನೆ (ಪ್ರಸ್ತರಣ)

6.1 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ :

ದತ್ತ ವಸ್ತು ಅಥವಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಗಮನ ಕೊಟ್ಟು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಜೋಡಣೆ ಮಾಡಿದರೆ, ಅಂತಹ ಒಂದೊಂದು ಜೋಡಣೆಯನ್ನೂ **ಕ್ರಮಯೋಜನೆ** ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ಕಾರಣದಿಂದ, $abcd$ ಎಂಬುದು ನಾಲ್ಕು ವಸ್ತುಗಳ ಒಂದು ಕ್ರಮ ಯೋಜನೆಯಾದರೆ, $acbd$ ಎಂಬುದು ಆ ವಸ್ತುಗಳ ಮತ್ತೊಂದು (ಭಿನ್ನ) ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಆದೇ ರೀತಿ $acdb$, $adbc$, $dbca$ ಇತ್ಯಾದಿ ಗಳೆಲ್ಲವೂ ಆ ನಾಲ್ಕು ವಸ್ತುಗಳ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ದತ್ತ ವಸ್ತುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ n ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಈ n ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ಕ್ರಮ ಯೋಜನೆಯನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ ಪ್ರತಿ ಜೋಡಣೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಎಲ್ಲ ವಸ್ತುಗಳೂ ಅಥವಾ $r\,(r < n)$ ವಸ್ತುಗಳು ಇರುವಂತೆ ರಚಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $abcd$ ಎಂಬ ವಸ್ತುಗಳ ಕ್ರಮಯೋಜನೆ ಮಾಡುವಾಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿಯೂ ನಾಲ್ಕೂ ವಸ್ತುಗಳೂ ಇರುವಂತೆ ರಚಿಸಬಹುದು. ಇಲ್ಲವೇ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿಯೂ ಈ ನಾಲ್ಕರಲ್ಲಿ ಮೂರು ವಸ್ತುಗಳು ಇರುವಂತೆ ಮಾಡ ಬಹುದು.

n ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಾರಿ r ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ರಚಿಸುವ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ^np_r ಅಥವಾ $_np_r$ ಎಂಬ ಸಂಕೇತಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಮರೂಪ ವಸ್ತುಗಳ ಕ್ರಮವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸುವುದರಿಂದ ಬೇರೆ ಕ್ರಮ ಯೋಜನೆಗಳು ಬರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಸದ್ಯಕ್ಕೆ ದತ್ತ ವಸ್ತುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಭಿನ್ನ (ವಿವಿಧ) ವೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.

a, b, c ಎಂಬ ಮೂರು ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ಒಂದು ಬಾರಿಗೆ ಎರಡೆರಡು ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಂಡು ರಚಿಸಬಹುದಾದಂತಹ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು : ab, bc, ac, ba, cb, ca ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $^3p_2 = 6$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದರೆ ದತ್ತ ವಸ್ತುಗಳು ಅಧಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಈ ಕ್ರಮವನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವುದು ಕಷ್ಟಸಾಧ್ಯ. ಆದುದರಿಂದ n ಭಿನ್ನ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯಾದ ^np_r ಎಂಬುದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

6.2 ಮೂಲಾಧಾರವಾದ ಸೂತ್ರ

ಒಂದು ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು 'm' ವಿವಿಧ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಡೆಸಬಹುದಾಗಿದ್ದು, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಡೆಸಿದ ಅನಂತರ, ಮತ್ತೊಂದು ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು n ವಿವಿಧ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಡೆಸಬಹುದಾದರೆ ಆ ಎರಡು ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನೂ ಒಂದಾದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತೊಂದರಂತೆ $m \times n$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ನಡೆಸಬಹುದು.

ಸಾಧನೆ: ಒಂದನೆಯ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು m ವಿವಿಧ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾದ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಡೆಸೋಣ. ಆಗ ಆ ಒಂದು ರೀತಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಎರಡನೆಯ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು n ವಿವಿಧ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ನಡೆಸಬಹುದು. ಮತ್ತು m ವಿವಿಧ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರೀತಿಗೂ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಎರಡನೆಯ ಕ್ರಿಯೆಯ n ರೀತಿಗಳಿರುತ್ತವೆ.

ಆದುದರಿಂದ "ಎರಡು ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನೂ ಒಂದಾದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತೊಂದರಂತೆ $m \times n$ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ನಡೆಸಬಹುದು".

ಇದೇ ತತ್ವವನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ, m ವಿವಿಧ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾದ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ನಡೆಸಿ, ಅನಂತರ n ವಿವಿಧ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನೂ ನಡೆಸಿ, ಬಳಿಕ mn ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾದ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದಾದ ಮೇಲೆ ಒಂದರಂತೆ ಮೊದಲಿನ ಎರಡು ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನೂ ನಡೆಸಿದ ನಂತರ, ಮೂರನೆಯ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು p ವಿವಿಧ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ನಡೆಸಿದರೆ, ಈ ಮೂರು ಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನೂ $m \times n \times p$ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ನಡೆಸಬಹುದು.

6.3 (a) ^np_r ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸೂತ್ರ

'n' ಭಿನ್ನ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ರಚಿಸಬಹುದಾದಂತಹ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ^np_r ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆಂದು ಈ ಮೊದಲೇ ತಿಳಿಸಿದೆ. ಇದರಿಂದ, ಕೊಟ್ಟಿರುವ

n ಭಿನ್ನ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿ, ಅವುಗಳನ್ನು ತಮ್ಮ ತಮ್ಮಲ್ಲಿಯೇ ^np_r ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ಆದುದರಿಂದ, ಒಂದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿಟ್ಟಿರುವ 'r' ಖಾಲಿ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು, ಕೊಟ್ಟಿರುವ n ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ಎಷ್ಟು ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಭರ್ತಿ ಮಾಡಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ^np_r ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಕೆಳಕಂಡ ಚಿತ್ರದ ಮೂಲಕ ವಿವರಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

1 ನೆಯದು	2 ನೆಯದು	3 ನೆಯದು		r ನೆಯದು
n	$n-1$	$n-2$	....	$n-r+1$

ಮೊದಲನೆಯ ಖಾಲಿ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇದನ್ನು n ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ತುಂಬಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಮೊದಲನೆಯ ಖಾಲಿ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು 'n' ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು.

ಮೊದಲನೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು n ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾದ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಭರ್ತಿಮಾಡಿದ ಅನಂತರ ಎರಡನೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು $(n-1)$ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಭರ್ತಿಮಾಡಬಹುದು. ಏಕೆಂದರೆ, ಆ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ಭರ್ತಿಮಾಡುವಾಗ $(n-1)$ ವಸ್ತುಗಳು ಮಾತ್ರ ಉಳಿದಿರುತ್ತವೆ. ಇವೆರಡೂ ಸ್ವತಂತ್ರ ಕ್ರಿಯೆಗಳಾದ್ದರಿಂದ ಮೊದಲನೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ಭರ್ತಿಮಾಡುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕ್ರಿಯೆಗೂ ಎರಡನೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ಭರ್ತಿಮಾಡುವ ಕ್ರಮಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $(n-1)$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ, ಮೊದಲನೆಯ ಎರಡು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು $n(n-1)$ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಭರ್ತಿಮಾಡಬಹುದು. ಅದೇ ರೀತಿ, ಮೊದಲನೆಯ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ಭರ್ತಿಮಾಡುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕ್ರಿಯೆಗೂ ಮೂರನೆಯ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು ಭರ್ತಿಮಾಡುವ ಕ್ರಮಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $(n-3)$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ, ಮೊದಲನೆಯ ಮೂರು ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು $n(n-1)\ (n-2)$ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು.

ಇದೇ ವಾದ ಸರಣಿಯಿಂದ ಮೊದಲನೆಯ r ಖಾಲಿ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗಳನ್ನು ಒಂದಾದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತೊಂದರಂತೆ, $n(n-1)\ (n-2)\ \ldots\ldots\ldots\ (n-r+1)$ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ತುಂಬಬಹುದು.

ಈಗ, 'n' ಭಿನ್ನ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ರಚಿಸಬಹುದಾದಂತಹ 'r' ಕ್ರಮ ಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು 'r' ಖಾಲಿ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಒಂದಾದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತೊಂದರಂತೆ 'n' ಭಿನ್ನ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ತುಂಬಬಹುದಾದ ಕ್ರಮಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಇವೆರಡೂ ಒಂದೇ ಆದುದರಿಂದ,

$$^np_r = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots(n-r+1)$$

ಇದೇ ಸೂತ್ರದಿಂದಾಗಲೀ ಅಥವಾ ಮೂಲಾಧಾರದ ತತ್ವದಿಂದಾಗಲೀ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.

(i) $^np_1 = n$

(ii) $^np_n = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots\ldots(n-n+1)$

$= n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots\ldots 3.2.1$

ಕ್ರಮಾಪವರ್ತನ ಲಬ್ಧ (ಶ್ರೇಣಿಲಬ್ಧ) : (Factorial of a number)

1 ರಿಂದ n ವರೆಗಿನ ಸಹಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ (ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಅಂಕೆಗಳ) ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು n ಸಂಖ್ಯೆಯ **ಕ್ರಮಾಪವರ್ತನ ಲಬ್ಧ**ವೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು $\underline{|n}$ ಅಥವಾ $n!$ ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

$n! = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots\ldots 3.2.1$

ಅಂದರೆ, ^np_n ಮತ್ತು $\underline{|n}$ ಸಂಕೇತಗಳು ಒಂದೇ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತವೆ.

6.3 (*b*) ^np_r ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕ್ರಮಾಪವರ್ತನ ಲಬ್ಧಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವಿಕೆ

$$^np_r = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots(n-r+1)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)\;(n-r)\;(n-r-1)\ldots\; 3\cdot2\cdot1}{(n-r)\;(n-r-1)\ldots\ldots\ldots\ldots 3.2.1}$$

$$\therefore\ ^np_r = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}$$

ಈ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ $r = n$ ಆದಾಗ ^np_n ಬೆಲೆಯನ್ನು

$$^np_n = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-n}} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|o}}$$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

${}^{n}p_n$ ಮತ್ತು $\lfloor n$ ಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಸಮನಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $\lfloor o = 1$ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ ಮಾತ್ರ ಆ ಸಮತೆಯು ಸಾಧ್ಯ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\lfloor o = 1$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು:

(1) ${}^{6}p_4$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$${}^{6}p_4 = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 360$$

(2) ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಬೀರುವಿನಲ್ಲಿ 10 ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಇಡಲು ಸ್ಥಳವಿದೆ. ಅಲ್ಲಿ ಅವನು 5 ಕನ್ನಡ, 3 ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಮತ್ತು 2 ಹಿಂದಿ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಇಡಲು ಬಯಸುತ್ತಾನೆ. ಒಂದೊಂದು ಭಾಷೆಯ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನೂ ಒಟ್ಟಾಗಿ ಇಡಬೇಕೆಂದು ಅವನು ಬಯಸಿದರೆ ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಬೀರುವಿನಲ್ಲಿಡಬಹುದು ?

ಬಿಡಿಸುವ ಕ್ರಮ

5 ಕನ್ನಡ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು 5 ! ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಬಹುದು.

3 ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು 3 ! ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಬಹುದು.

2 ಹಿಂದಿ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು 2 ! ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಬಹುದು.

ಈ 3 ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಗುಂಪುಗಳನ್ನು 3 ! ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಬಹುದು.

ಆದುದರಿಂದ, ವಿವಿಧ ವಿಧಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ $= 5! \times 3! \times 2! \times 3!$

$= 8640$

6·4 ಕೆಲವು ವಸ್ತುಗಳು ಪುನರಾವರ್ತಿಸುವಾಗ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು

ಉದಾಹರಣೆಗೆ 1, 1, 1, 2, 3 ಈ ಅಂಕೆಗಳಿಂದ ರಚಿಸಬಹುದಾದ 5 ಅಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಅಂಕೆಗಳೆಲ್ಲವೂ ಭಿನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ 5 ! ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದರೆ ಇಲ್ಲಿ 3 ಅಂಕೆಗಳು ಪುನಾರವರ್ತಿಸುವುದರಿಂದ ದೊರೆಯುವ ಕ್ರಮ ಯೋಜನೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ 5 ! ಗಿಂತ ಕಡಮೆ ಇರಬೇಕು.

ಈ 1, 1, 1, 2, 3 ಅಂಕೆಗಳ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಕ್ರಮ ಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ P ಆಗಿರಲಿ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಕ್ರಮ ಯೋಜನೆಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷೆ

ಮಾಡಿ. 2 ಮತ್ತು 3 ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಸ್ಥಿರವಾಗಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ಮೂರು 1 ಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಬರೆದರೆ ಈ ಒಂದು ಕ್ರಮ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು 3 ! ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಆದುದರಿಂದ ಈ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ P ಕ್ರಮ ಯೋಜನೆಗಳಿಂದ $3! \times P$ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಇವೆಲ್ಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಯಾವ ಅಂಕೆಯೂ ಪುನರಾವರ್ತಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂದರೆ, ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯು ${}^5p_5$ ಅಥವಾ 5 ! ಗೆ ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು.

ಆದುದರಿಂದ. $3! \times P = 5!$

$$P = \frac{5!}{3!} = 20$$

ಇದೇ ರೀತಿ n ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ, p ವಸ್ತುಗಳು ಒಂದೇ ಬಗೆಯವು, q ವಸ್ತುಗಳು ಮತ್ತೊಂದು ಬಗೆಯವು, r ವಸ್ತುಗಳು ಮೂರನೆಯ ಬಗೆಯವು ಇತ್ಯಾದಿಯಾಗಿದ್ದು, ಅವೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಒಂದೇ ಸಲ ಆರಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ P ಎಂದಾದರೆ,

ಆಗ, $$P = \frac{n!}{p! \cdot q! \cdot r! \ldots}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) CALCUTTA ಪದದ ಅಕ್ಷರಗಳ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳೆಷ್ಟು ?

ಇಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು 8 ಅಕ್ಷರಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ C ಎರಡು ಬಾರಿ, A ಎರಡು ಬಾರಿ, T ಎರಡು ಬಾರಿ, ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿವೆ.

$$\therefore P = \frac{8!}{2!\,2!\,2!} = 5040$$

(2) 2 ಹಸುರು, 3 ಬಿಳಿ ಮತ್ತು 3 ನೀಲಿ ಬಣ್ಣದ ಬಾವುಟಗಳನ್ನು ಒಂದು ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸಾಲಾಗಿಟ್ಟು ಸಂಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಕಳುಹಿಸಲಾಗುವುದು. ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಿಧದ ಎಷ್ಟು ಸಂಜ್ಞೆಗಳನ್ನು ಕಳುಹಿಸಬಹುದು ?

$P = \dfrac{n!}{p!\,q!\,r!}$ ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ,

ಇಲ್ಲಿ, $n = 8, \quad p = 2, \quad q = 3, \quad r = 3$

$$\therefore P = \frac{8!}{2!\,3!\,3!} = 560$$

6.5 ವರ್ತುಳೀಯ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳು

ಒಂದು ಮೇಜಿನ ಸುತ್ತಲೂ 5 ಗಣ್ಯ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಕೂರಿಸಬೇಕು ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ ಎಷ್ಟು ಬೇರೆ ಏರ್ಪಾಡುಗಳು ಸಾಧ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಮೊದಲು ಒಬ್ಬರನ್ನು ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಕುರ್ಚಿಯಲ್ಲಿ ಕೂರಿಸೋಣ. ಇನ್ನುಳಿದ ನಾಲ್ವರನ್ನು 4 ! ಬೇರೆ ಬೇರೆ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕೂರಿಸ ಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ಇನ್ನಾವ ಏರ್ಪಾಡೂ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, n ಬೇರೆ ಬೇರೆ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಒಂದು ವೃತ್ತಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಬೇಕಾದರೆ ಅಂತಹ ವರ್ತುಳೀಯ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ $(n-1)!$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 10 ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಣ್ಣದ ಮಣಿಗಳನ್ನು ಪೋಣಿಸಿ ಒಂದು ಕಡಗವನ್ನು 9 ! ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 6 (ಅ)

1. ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರಿ :

(i) ${}^{8}p_2 + {}^{5}p_3 + {}^{6}p_4 + {}^{8}p_1$

(ii) ${}^{8}p_2$, ${}^{9}p_3$, ${}^{6}p_5$, ${}^{6}p_4$, ${}^{7}p_4$, $\underline{|6}$

2. a, b, c, d, e, f ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ 3 ಅಕ್ಷರಗಳಿರುವ ಎಷ್ಟು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪದ ಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು ?

3. 50 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿರುವ ಒಂದು ತರಗತಿಯಿಂದ ಒಬ್ಬ ಅಧ್ಯಕ್ಷ, ಒಬ್ಬ ಉಪಾಧ್ಯಕ್ಷ ಮತ್ತು ಒಬ್ಬ ಕಾರ್ಯದರ್ಶಿ ಇವರುಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಚುನಾಯಿಸಬಹುದು ?

4. 5 ಆಸನಗಳಿರುವ ಒಂದು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 3 ಹುಡುಗರು ಮತ್ತು 2 ಹುಡುಗಿ ಯರನ್ನು.

(a) ಅವರೆಲ್ಲಿ ಬೇಕಾದರೂ ಕುಳಿತುಕೊಳ್ಳಬಹುದು;

(b) ಹುಡುಗ ಹುಡುಗಿಯರು ಪರ್ಯಾಯ (Alternatively) ವಾಗಿ ಕೂಡ ಬೇಕು.

ಎಂದಿದ್ದರೆ, ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಕೂರಿಸಬಹುದು.

5. ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ವರ್ಣಮಾಲೆಯ ಯಾವುದೇ 3 ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಮೊದಲಿನ ಮೂರು ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಆರಿಸಿ, ಕೊನೆಯ 4 ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ನಾಲ್ಕು ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿ, ಎಷ್ಟು ಲೈಸೆನ್ಸ್ ಪ್ಲೇಟುಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಬಹುದು?

6. ಒಟ್ಟು 8 ಜನರಿರುವಲ್ಲಿ, ಇಬ್ಬರು ಪರಸ್ಪರ ಸಮೀಪವೇ ಕೂರಬೇಕೆಂದು ಪಟ್ಟುಹಿಡಿದರೆ, ಆ 8 ಮಂದಿಯನ್ನು ಸಾಲಾದ 3 ಆಸನಗಳ ಮೇಲೆ ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಕುಳ್ಳಿರಿಸಬಹುದು?

7. ಒಂದು ಮೇಜಿನ ಸುತ್ತಲೂ 9 ಜನರನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಕುಳ್ಳಿರಿಸಬಹುದು?

8. ಒಟ್ಟು 12 ಜನರಿರುವಲ್ಲಿ, ಇಬ್ಬರು ಪರಸ್ಪರ ಸಮೀಪವೇ ಕುಳಿತುಕೊಳ್ಳಬೇಕೆಂದು ಪಟ್ಟುಹಿಡಿದರೆ, ಅವರನ್ನು ಮೇಜಿನ ಸುತ್ತಲೂ ಎಷ್ಟು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಕುಳ್ಳಿರಿಸಬಹುದು?

9. ಕೆಳಗಿನ ಪದಗಳ ಅಕ್ಷರಗಳ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(*a*) UNIVERSE (*b*) MATHEMATICS (*c*) INVENTION
(*d*) REPORTER (*e*) ATTITUDE

10. 8 ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಣ್ಣದ ಮಣಿಗಳನ್ನು ಪೋಣಿಸಿ, ಒಂದು ಕಡಗವನ್ನು ಎಷ್ಟು ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ರಚಿಸಬಹುದು?

11. ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ತನ್ನ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಬೀರುವಿನಲ್ಲಿ ಓರಣವಾಗಿ ಇಡಬಯಸುತ್ತಾನೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ 5 ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದ್ದೂ, 3 ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರದ್ದೂ ಮತ್ತು 6 ರಸಾಯನ ಶಾಸ್ತ್ರದ್ದೂ ಆಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಶಾಸ್ತ್ರದ ಪುಸ್ತಕಗಳೂ ಒಟ್ಟಾಗಿ ಇರಬೇಕಾದರೆ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಏರ್ಪಾಡು ಸಾಧ್ಯ?

12. 8 ಹುಡುಗರಲ್ಲಿ 2 ಹುಡುಗರು ; (*a*) ಪರಸ್ಪರ ಸಮೀಪದಲ್ಲಿ ಕೂರಬೇಕೆಂದು, (*b*) ಪರಸ್ಪರ ಸಮೀಪದಲ್ಲಿ ಕುಳಿತುಕೊಳ್ಳಬಾರದೆಂದು ಅಪೇಕ್ಷೆಪಟ್ಟರೆ, ಆ ಹುಡುಗರು ಒಂದು ಮೇಜಿನ ಸುತ್ತಲೂ ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಕುಳಿತುಕೊಳ್ಳಬಹುದು?

13. BOTANY ಎಂಬ ಪದದ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಬಹುದು? ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಜೋಡಣೆಗಳು A ಎಂಬ ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6.6 ವಿಕಲ್ಪಗಳು (ಸಂಯೋಜನೆಗಳು)

ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳಲ್ಲಿ ವಸ್ತುಗಳ ಒಂದು ಗಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವುದರ ಜೊತೆಗೆ, ಆ ವಸ್ತುಗಳ ಸ್ಥಾನವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಸ್ಥಾನಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸದೆ ಕೇವಲ ವಸ್ತುಗಳ ಆರಿಸುವಿಕೆಗೆ ಮಾತ್ರ ಗಮನ ವೀಯುವ ಕ್ರಮವನ್ನು **ವಿಕಲ್ಪ** (ಸಂಯೋಜನೆ) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಸ್ಥಾನವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳದಿರುವ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಯನ್ನು **ವಿಕಲ್ಪ** ಎನ್ನಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಾಗಿ A, B, C ಎಂಬ ಮೂರು ವಸ್ತುಗಳಿಂದ 2 ವಸ್ತುಗಳನ್ನು, 3 ರೀತಿಗಳಾದ AB, BC, AC ಎಂಬ ಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು. ಏಕೆಂದರೆ, ಇಲ್ಲಿ AB ಅಥವಾ BA, BC ಅಥವಾ CB, AC ಅಥವಾ CA ಯಾವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಕರೆದರೂ ಆರಿಸುವಿಕೆ ಮಾತ್ರ ಒಂದೇ ಆಗಿರುವುದು.

n ವಿವಿಧ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಆರಿಸುವ ಕ್ರಮಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $n^{c}r$ ಅಥವಾ ${}^{n}c_{r}$ ಎನ್ನುವ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

6.7 ವಿಕಲ್ಪಗಳ ಮುಖ್ಯ ಸೂತ್ರ

$${}^{n}c_{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

ಸಾಧನೆ : r ಭಿನ್ನ ವಸ್ತುಗಳಿರುವ ${}^{n}c_{r}$ ವಿಕಲ್ಪಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಈ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಪ್ರಕಾರ r ವಿವಿಧ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಕಲ್ಪವನ್ನೂ ಕ್ರಮಾನುಗತವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದರಲ್ಲಿರುವ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ವಿವಿಧ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿ, $r!$ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ, ಎಲ್ಲ ${}^{n}c_{r}$ ವಿಕಲ್ಪಗಳಿಂದ $r!\,{}^{n}c_{r}$ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಆದರೆ ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯು n ಭಿನ್ನ ವಸ್ತುಗಳಿಂದ ಒಂದು ಸಲಕ್ಕೆ r ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕ್ರಮಯೋಜನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮ.

$$\therefore r!\,{}^{n}c_{r} = {}^{n}p_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\therefore {}^{n}c_{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \cdots\cdots\cdots (1)$$

6·8 ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯ ಅನುಮಿತಗಳು (Some Important deductions)

I. ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ r ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ $(n-r)$ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

$$^{n}c_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿದರೆ ದೊರಕುವ ಮುಖ್ಯ ಸೂತ್ರ, $^{n}c_{r} = {}^{n}c_{n-r}$

II. ವಿಕಲ್ಪಗಳ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ರೂಪದಲ್ಲಿಯೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$^{n}c_{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots r}$$

III. (i) $^{n}c_{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ, $r = n$

ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದರೆ, ಆಗ

$$^{n}c_{n} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1 \quad (\because 0! = 1)$$

(ii) $^{n}c_{r} + {}^{n}c_{r-1} = {}^{n+1}c_{r}$

ಸಾಧನೆ :

$$^{n}c_{r} + {}^{n}c_{r-1} = \frac{n!}{r!(n-r!)} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{(n-r+1)}\right]$$

$$= \frac{n!(n+1)}{(r-1)!(n-r)!\,r(n-r+1)}$$

$$= \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!}$$

$$= {}^{n+1}c_{r}$$

$$\therefore {}^{n}c_{r} + {}^{n}c_{r-1} = {}^{n+1}c_{r}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

(i) ${}^{10}c_3$ (ii) ${}^{4}c_1 + {}^{6}c_2 + {}^{8}c_3$

(i) $${}^{10}c_3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$$

(ii) $${}^{4}c_1 + {}^{6}c_2 + {}^{8}c_3 = 4 + \frac{6\times 5}{1\times 2} + \frac{8\times 7\times 6}{1\times 2\times 3}$$

$$= 4 + 15 + 56$$
$$= 75$$

(2) 16 ಹುಡುಗರೂ, 14 ಹುಡುಗಿಯರೂ ಇರುವ ಒಂದು ತರಗತಿಯಿಂದ, 4 ಹುಡುಗರೂ ಮತ್ತು 3 ಹುಡುಗಿಯರೂ ಇರುವಂತಹ ಸಮಿತಿಯನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು ?

16 ಹುಡುಗರಿಂದ 4 ಹುಡುಗರನ್ನು ${}^{16}c_4$ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು.

14 ಹುಡುಗಿಯರಿಂದ 3 ಹುಡುಗಿಯರನ್ನು ${}^{14}c_3$ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂಲ ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ, 4 ಹುಡುಗರೂ, 3 ಹುಡುಗಿಯರೂ ಇರುವ ಸಮಿತಿಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆ

$$= {}^{16}c_4 \cdot {}^{14}c_3 = \frac{16\times 15\times 14\times 13}{1\times 2\times 3\times 4} \times \frac{14\times 13\times 12}{1\times 2\times 3}$$

$= 6{,}62480$

ಅಭ್ಯಾಸ 6 (ಅ)

1. ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

(i) ${}^{7}c_3$ (ii) ${}^{9}c_4$ (iii) ${}^{12}c_9$ (iv) 20_{c18} (v) ${}^{15}c_2$ (vi) ${}^{25}c_{22}$
(vii) ${}^{10}c_6$

2. ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರಿ :

$${}^{6}c_1 + {}^{6}c_2 + {}^{6}c_3 + {}^{6}c_4 + {}^{6}c_5 + {}^{6}c_6$$

3. ${}^9c_3\,{}^9c_4$ ಮತ್ತು ${}^{10}c_4$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ${}^9c_3 + {}^9c_4 = {}^{10}c_4$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

4. 25 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿರುವ ಒಂದು ತರಗತಿಯಿಂದ 5 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿರುವ ತಂಡವನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು ?

5. 16 ಆಟಗಾರರಿಂದ ಒಂದು ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಟೀಮನ್ನು ಆರಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಈ 16 ಮಂದಿಯಲ್ಲಿ, 6 ಮಂದಿ ಬೌಲರರೂ, ಇಬ್ಬರು ವಿಕೆಟ್ ಕೀಪರರೂ ಇದ್ದಾರೆ. ಕನಿಷ್ಠಪಕ್ಷ ಒಬ್ಬ ವಿಕೆಟ್ ಕೀಪರನೂ. 4 ಮಂದಿ ಬೌಲರರೂ ಇರುವ 11 ಜನರ ಟೀಮನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು ?

6. 12 ಬಿಂದುಗಳಿವೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ 3 ಬಿಂದುಗಳೂ ಏಕರೇಖಾ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಹಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ 12 ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಎಷ್ಟು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು ?

7. CHEMISTRY ಎಂಬ ಪದದಿಂದ 3 ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಂಡ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು ?

8. ${}^nc_{n-4} = 35$ ಆಗಿದ್ದರೆ, ${}^nc_5$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಒಂದು ವರ್ಣಮಾಲೆಯಲ್ಲಿ 16 ಸ್ವರಗಳೂ 26 ವ್ಯಂಜನಗಳೂ ಇವೆ. ಇದರಿಂದ ಆರು ಅಕ್ಷರಗಳಿರುವ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು ? ಇವುಗಳೆಷ್ಟರಲ್ಲಿ 4 ವ್ಯಂಜನಗಳಿರುವುದಿಲ್ಲ ?

10. 20 ಜನರ ಒಂದು ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ 8 ಮಹಿಳೆಯರು ಇದ್ದಾರೆ. ಇವರಿಂದ (*i*) 6 ಮಹಿಳೆಯರನ್ನೊಳಗೊಂಡ (*ii*) ಕಡೆಯಪಕ್ಷ 6 ಮಹಿಳೆಯರನ್ನೊಳಗೊಂಡ 12 ಜನರ ಗುಂಪನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಬಹುದು ?

ಅಧ್ಯಾಯ 7

ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯ (BINOMIAL THEOREM)

7.1 ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯ

ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಸ್ತರಣೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

$$(a+b)^1 = a + b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$$

ಇವುಗಳನ್ನು ಗುಣಾಕಾರದಿಂದ ತಾಳೆ ನೋಡಬಹುದು.

ಈ ದ್ವಿಪದ ವಿಸ್ತರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಗುಣಗಳನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು ;

(1) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಇರುವ ಒಟ್ಟು ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $(a+b)$ ಯ ಘಾತಕ್ಕಿಂತ ಒಂದು ಹೆಚ್ಚು. $(a+b)^2$ ನಲ್ಲಿ 3 ಪದಗಳಿವೆ, $(a+b)^3$ ನಲ್ಲಿ 4 ಪದಗಳಿವೆ, $(a+b)^4$ ನಲ್ಲಿ 5 ಪದಗಳಿವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ $(a+b)^n$ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ $(n+1)$ ಪದಗಳಿರುತ್ತವೆ.

(2) ಒಂದು ಪದದಿಂದ ಮುಂದಿನ ಪದಕ್ಕೆ ಸಾಗುವಾಗ 'a' ಯ ಘಾತವು ಒಂದು ಕಡಮೆಯಾಗುವುದು, 'b' ಯ ಘಾತವು ಒಂದು ಹೆಚ್ಚು ಆಗುವುದು.

(3) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗುಣಾಂಕವನ್ನು, n ಮತ್ತು r ಗಳಿಗೆ ಸೂಕ್ತ ಬೆಲೆ ಕೊಡುವುದರ ಮೂಲಕ n_{c_r} ನ ಒಂದು ಬೆಲೆಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು. ಇದರ ಪ್ರಕಾರ,

$$(a+b)^3 = 3_{c_0} a^3 + 3_{c_1} a^2 b + 3_{c_2} ab^2 + 3_{c_3} b^3$$

ಮತ್ತು $(a+b)^4 = 4_{c_0} a^4 + 4_{c_1} a^3 b + 4_{c_2} a^2 b^2 + 4_{c_3} ab^3 + 4_{c_4} b^4$

ಮೇಲ್ಕಂಡ ವಿಸ್ತರಣೆಗಳ ಪ್ರಕಾರ n ಯಾವುದೇ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ $(a+b)^n$ ಎಂಬುದರ ವಿಸ್ತರಣೆಗೂ ಇಂತಹ ಒಂದು ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯ ದೊರೆಯುವುದು.

7.2 ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯ

n ಒಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ,

$$(a+b)^n = a^n + n_{c_1} a^{n-1} b + n_{c_2} a^{n-2} b^2 + \ldots\ldots + n_{c_r} a^{n-r} b^r + \ldots\ldots\ldots + n_{c_n} b^n$$

ಸಾಧನೆ (ವಿಕಲ್ಪದ ತತ್ತ್ವವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ)—ಮೊದಲನೆಯ ವಿಧಾನ :

$(a+b)^n$ ಎನ್ನುವ ಉತ್ಪನ್ನವು n ಸಮಾನ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಎಂಬ ತತ್ತ್ವದ ಪ್ರಕಾರ,

$(a+b)^n = (a+b)(a+b)(a+b)\ldots.(a+b)$ (n ಅಪವರ್ತನಗಳು).

ಈ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವ ಒಂದು ಪದವನ್ನು ಪಡೆಯಬೇಕಾದರೂ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪವರ್ತನದಿಂದ, a ಅಥವಾ b ಯನ್ನು ಆರಿಸಿ, ನಂತರ ಈ ಆರಿಸಿದ n ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಬೇಕು.

ಹೀಗೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಪವರ್ತನದಿಂದ 'a' ಯನ್ನು ಆರಿಸಿ ಈ 'n', 'a' ಗಳನ್ನು ತಮ್ಮ ತಮ್ಮಲ್ಲೇ ಗುಣಿಸಿದರೆ a^n ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಈ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಒಂದೇ ವಿಧದಲ್ಲಿ ನಡೆಸಬಹುದಾದ್ದರಿಂದ ಈ ಪದದ ಗುಣಾಂಕವು 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$a^{n-1}b$ ಪದವನ್ನು ಪಡೆಯಲು b ಯನ್ನು ಒಂದು ಅಪವರ್ತನದಿಂದ ಆರಿಸಿ, ಅದನ್ನು ಉಳಿದ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಂದ ಆರಿಸಿದ $(n-1)$ 'a' ಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸಬೇಕು. ಆದರೆ, b ಯನ್ನು n ಅಪವರ್ತನಗಳಿಂದ n_{c_1} ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ $a^{n-1}b$ ಪದದ ಗುಣಕವು ${}^nc_1$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

n ಅಪವರ್ತನಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡರಿಂದ b ಗಳನ್ನು ಆರಿಸಿಕೊಂಡು ಅವುಗಳನ್ನು ಉಳಿದ $(n-2)$ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಂದ ಆರಿಸಿದ a ಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ $a^{n-2}b^2$ ಪದವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಆದರೆ n ಅಪವರ್ತನಗಳಿಂದ b ಯನ್ನು ಸಲಕ್ಕೆ ಎರಡರಂತೆ ${}^nc_2$ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಆರಿಸಬಹುದು.

ಇದರಿಂದ, ${}^nc_2 . a^{n-2} . b^2$ ಎನ್ನುವ ಪದವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, $a^{n-2}b^2$ ನ ಗುಣಕವು ${}^nc_2$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿದರೆ 0 (ಸೊನ್ನೆ)ಯಿಂದ n ವರೆಗೆ (ಎರಡೂ ಸೇರಿದಂತೆ) r ನ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗೆ ${}^nc_r . a^{n-r} . b^r$ ಎಂಬ ಪದವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಇಂತಹ ಎಲ್ಲಾ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವೇ **ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯ.**

ಆದ್ದರಿಂದ,

$$(a+b)^n = a^n + {}^nc_1 \cdot a^{n-1} b + {}^nc_2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots\ldots.. + {}^nc_r \cdot a^{n-r} \cdot b_r + \ldots\ldots + b^n$$

7.3 ಸಾಧನೆ (ಎರಡನೆಯ ವಿಧಾನ) :

ಗಣಿತಾನುಮಿತಿಯ ತತ್ವದ ಪ್ರಕಾರ—(**Mathematical Induction**)

ಗಣಿತಾನುಮಿತಿಯ ಪ್ರಕಾರ,

(*a*) $n = 1, 2, 3, 4$ ಆಗಿದ್ದಾಗ ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯದ ಸತ್ಯತೆಯನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಬೇಕು ;

(*b*) $n = m$ ಎನ್ನುವ n ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬೆಲೆಗೆ ಈ ಪ್ರಮೇಯ ಸತ್ಯವೆಂದು ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡರೆ, $n = m + 1$ ಆಗಿದ್ದಾಗಲೂ, ಅದು ಸತ್ಯವೆಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕು.

ಇಲ್ಲಿ (*a*) ಯನ್ನು ಮೊದಲೇ ತಾಳೆ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. (*b*) ಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

$n = m$ ಆದಾಗ ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯವು ಸತ್ಯ ಎಂದು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ,

$$(a+b)^m = a^m + {}^mc_1 \cdot a^{m-1} \cdot b + {}^mc_2 \cdot a^{m-2} b^2 + \ldots\ldots + {}^mc_r \cdot a^{m-r} \cdot b^r + \ldots\ldots\ldots + b^m$$

ಇದರ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು $(a+b)$ ಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿದರೆ, ಆಗ,

$$(a+b)^{m+1} = a^{m+1} + ({}^mc_0 + {}^mc_1)\, a^m \cdot b + ({}^mc_1 + {}^mc_2)\, a^{m-1} \cdot b^2 + \ldots\ldots + ({}^mc_r + {}^mc_{r-1})\, a^{m+1-r} b^r + \ldots\ldots + b^{m+1}$$

ಆದರೆ, ${}^mc_r + {}^mc_{r-1} = {}^{m+1}c_r$ ಎಂದು ಮೊದಲೇ ಸಾಧಿಸಿದ್ದೇವೆ.

$$\therefore (a+b)^{m+1} = a^{m+1} + {}^{(m+1)}c_1\, a^m \cdot b + {}^{(m+1)}c_2 \cdot a^{m-1} \cdot b^2 + + {}^{(m+1)}c_r \cdot a^{m+1-r} \cdot b^r + \ldots\ldots\ldots + b^{m+1}$$

$n = (m+1)$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯವು ಕೊಡುವ ಬೆಲೆ ಇದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $n = m$ ಆದಾಗ ಪ್ರಮೇಯವು ಸತ್ಯವೆಂದಾದರೆ $n = m + 1$ ಆದಾಗಲೂ ಇದು ಸತ್ಯವಾಗಿರಬೇಕು. ಪ್ರಮೇಯವು $n = 1, 2, 3, 4$ ಆದಾಗ ಸತ್ಯವೆಂದು ಆಗಲೇ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಅದು $4 + 1 = 5, 5 + 1 = 6$ ಇತ್ಯಾದಿ n ನ ಎಲ್ಲಾ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಸತ್ಯವಾಗಿರಬೇಕು.

7.4 ದ್ವಿಪದೀಯ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸೂತ್ರ

$(a+b)^n = a^n + {}^nc_1 \cdot a^{n-1} \cdot b + {}^nc_2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots\ldots + b^n$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿರಿ.

ಇದರಲ್ಲಿ,

ಎರಡನೆಯ ಪದ $= {}^nc_1 \cdot a^{n-1} \cdot b$

ಮೂರನೆಯ ಪದ $= {}^nc_2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2$

ನಾಲ್ಕನೆಯ ಪದ $= {}^nc_3 \cdot a^{n-3} \cdot b^3$

....

....

$(r+1)$ ನೆಯ ಪದ $= {}^nc_r \cdot a^{n-r} \cdot b^r$

ಆದುದರಿಂದ, $(r+1)$ ನೆಯ ಪದವನ್ನು T_{r+1} ರಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದರೆ,

$$T_{r+1} = {}^nc_r \cdot a^{n-r} \cdot b^r$$

ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ $a=1,\ b=x$ ಆದಾಗ,

$$(1+x)^n = 1 + {}^nc_1 \cdot x + {}^nc_2 \cdot x^2 + \ldots\ldots + {}^nc_r \cdot x^r + \ldots\ldots + x^n$$

ಮತ್ತು $a=1,\ b=-x$ ಆದಾಗ

$$(1-x)^n = 1 - {}^nc_1 \cdot x + {}^nc_2 x^2 - + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^r\, {}^nc_r\, x^r + \ldots\ldots + (-1)^n \cdot x^n$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ, $(2x+y)^6$ ನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ.

$$(2x+y)^6 = (2x)^6 + {}^6c_1 (2x)^5 \cdot y + {}^6c_2 \cdot (2x)^4 \cdot y^2 + {}^6c_3 \cdot (2x)^3 \cdot y^3 + {}^6c_4 (2x)^2 \cdot y^4 + {}^6c_5 \cdot (2x) \cdot y^5 + y^6$$

$$= 64x^6 + 192x^5y + 240x^4y^2 + 160x^3y^3 + 60x^2y^4 + 12xy^5 + y^6$$

(2) $\left(4+\frac{x}{2}\right)^{13}$ ರಲ್ಲಿ 10ನೆಯ ಪದವನ್ನು ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ,

$$T_{r+1} = {}^nc_r \cdot a^{n-r} \cdot b^r$$

$\therefore$ **ಬೇಕಾದ ಪದ** $T_{10} = {}^{13}c_9 \, (4)^{13-9} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^9$

$$= {}^{13}c_9 \cdot 4^4 \cdot \frac{x^9}{2^9}$$

$$= \frac{715}{2} \cdot x^9$$

(3) ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ $(1 + 0{\cdot}01)^4$ ಎಂಬುದನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ ತನ್ಮೂಲಕ $(1{\cdot}01)^4$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು 4 ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$(1 + 0{\cdot}01)^4 = 1 + 4c_1(0{\cdot}01) + {}^4c_3(0{\cdot}01)^2 + {}^4c_3(0{\cdot}01)^3 + (0{\cdot}01)^4$$
$$= 1 + 0{\cdot}04 + 0{\cdot}0006 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= 1{\cdot}0406$$

$\therefore (1{\cdot}01)^4 = 1{\cdot}0406$ (4 ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ)

(4) $(2x + 3)^5$ ರ ಮಧ್ಯಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$(2x + 3)^5$ ರ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ 6 ಪದಗಳಿರುವುದರಿಂದ ಎರಡು ಮಧ್ಯಪದಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಅವು ಯಾವುವೆಂದರೆ 3 ಮತ್ತು 4ನೆಯ ಪದೆಗಳು,

$\therefore$ 3 ನಯ ಪದ $= T_3 = {}^5c_2(2x)^{5-2} \cdot (3)^2$

$$= \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} 2^3 \cdot x^3 \cdot 9 = 720\, x^3.$$

4 ನೆಯ ಪದ $= T_4 = {}^5c_3 \cdot (2x)^{5-3} \cdot (3)^3$

$$= \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot 2^2 \cdot x^2 \cdot 27 = 1080\, x^2$$

ಅಭ್ಯಾಸ 7

I. ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಇವುಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿರಿ:

(1) $(x + 3y)^6$ (2) $(2x - 3y)^5$ (3) $(x + y)^6$

(4) $(x - y)^8$ (5) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^7$ (6) $\left(3x - \frac{1}{3x}\right)^{10}$

(7) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{n}$ (8) $(a^{-1}+b^{-2})^{6}$ (9) $(1-x)^{8}$

(10) $(x-2)^{9}$.

II. ಈ ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಪದಗಳನ್ನು ಕನಿಷ್ಠ ರೂಪದಲ್ಲಿಡಿರಿ.

(1) $(3a-2b)^{9}$ ರಲ್ಲಿ 5 ನೆಯ ಪದ (2) $\left(4+\frac{a}{2}\right)^{13}$ ರಲ್ಲಿ 9ನೆಯ ಪದ

(3) $(\frac{1}{2}x-2y)^{7}$ ರಲ್ಲಿ 5 ನೆಯ ಪದ (4) $\left(x^{2}-\frac{x}{2}\right)^{10}$ ರಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಪದ

(5) $(3x-2)^{15}$ ರಲ್ಲಿ x^{12} ಇರುವ ಪದ (6) $\left((3x-\frac{1}{3x}\right)^{8}$ ರಲ್ಲಿ x ಇಲ್ಲದಿರುವ ಪದ

(7) $\left(x^{2}-\frac{2}{x}\right)^{6}$ ರಲ್ಲಿ x ಇಲ್ಲದಿರುವ ಪದ

(8) $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{9}$ ರಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಪದಗಳು

(9) $\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{15}$ ರಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಪದಗಳು

(10) $(2a-3b)^{6}$ ರಲ್ಲಿ ಮಧ್ಯಪದ

III. ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $(0.96)^{5}$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು 3 ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

IV. $(1.06)^{7}$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು 4 ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

V. $(0.99)^{4}$ ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು 4 ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

VI. $\{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^{6}-(\sqrt{5}-\sqrt{3})^{6}\}$ ಇದರ ಬೆಲೆ ಎಷ್ಟು?

ಉತ್ತರಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 1 (ಅ)

2. (i) {2} {5}, {7}, {2, 5}, {5, 7}, {2, 7}, {2, 5, 7}
(ii) {− 3}, {− 2}, {− 4}, {− 1}, {− 3, − 2},
{− 3, − 4}, {− 3, − 1}, {− 2, − 4}, {− 2, − 1},
{− 4, − 1}, {− 3, − 2, − 4}, {− 3, − 2, − 1},
{− 3, − 4, − 1}, {− 2, − 4, − 1}, {− 3, − 2, − 4, −1}
(iii) {*a*}, {*b*}, {*c*}, {*a*, *b*}, {*b*, *c*}, {*c*, *a*}, {*a*, *b*, *c*} (iv) ϕ

3. (i) {1, 2, 3, 4, 5, 6} (ii) {2} (iii) {4, 6, 7, 8} (iv) {1, 4, 6, 7, 8}
(v) {2 3 4, 5, 6} (vi) {1, 2, 4, 6, 7, 8}

4. (i) {*a*, *b*, *c*, *d*, *g*} (ii) {*a*, *b*, *c*, *d*, *g*, *m*, *n*, *p*} (iii) {*a*, *c*}
(iv) {*a*, *c*, *g*, *m*, *n*, *p*}.

5. 65 ಎಕರೆ

ಅಭ್ಯಾಸ 1 (ಅ)

I. (1) 1 (2) − 1 (3) 3 (4) y (5) 1 (6) 1 (7) $\frac{1}{y}$

II. (1) $\frac{1}{a^3}$ (2) $\frac{1}{x}$ (3) $\frac{1}{3^{10}}$ (4) $\frac{x^2}{y^3}$ (5) $\frac{1}{a^2b^4}$ (6) $\frac{3}{x^3}$ (7) $\frac{5}{t^4}$
(8) $\frac{4s^3}{r}$ (9) $\frac{1}{2^2b^3}$ (10) $\frac{1}{10^6}$ (11) $\frac{1}{(xy)^5}$ (12) $\frac{1}{4y^3}$ (13) $\frac{1}{3t^4}$
(14) x^3 (15) $5y^4$ (16) c (17) $a^3 b^2$ (18) $\frac{3y^4}{x^2}$ (19) $\frac{1}{(x-y)^2}$
(20) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}$

III. (1) 1 (2) 1 (3) $\frac{1}{36}$ (4) 36 (5) $\frac{1}{2}$ (6) $\frac{1}{1000}$ (7) 5
(8) 8 (9) 21 (10) 81 (11) 4 (12) $\frac{27}{64}$ (13) 1 (14) 24
(15) 10 (16) $\frac{3}{2}$ (17) $8\frac{5}{6}$ (18) $-\frac{14}{9}$ (19) 3

IV. (1) $9\frac{1}{2}$ (2) 28 (3) $\frac{1}{72}$ (4) $7\frac{27}{32}$

VI. (1) a^3 (2) $\frac{1}{c^2}$ (3) e^{-4x} (4) x^{-5} (5) x^{-4} (6) 1 (7) y^4
(8) 3 (9) 10^5 (10) 5^8 (11) x^m (12) a^3b (13) a^5 (14) $\frac{1}{b^{10}}$
(15) $x^{\frac{4}{15}}$ (16) c (17) $d^{1/4}$ (18) x^{-4} (19) a (20) $b^{5/3}$ (21) $x^{-3/2}$
(22) $y^{1/12}$ (23) $z^{1/5}$ (24) e (25) y^3 (26) $\frac{1}{1000}$ (27) $x^{4/9}$
(28) 1552·5 (29) $\frac{3}{2}a^2bxy^3$ (30) az^2 (31) $\frac{a^2-b^2}{x^2-y^2}$
(32) $\frac{675a^5z^2}{8x^5y^4}$

VII. (1) 2 (2) 3 (3) 3 (4) 4 (5) 3 (6) 4 (7) 1 (8) 7
(9) 2 (10) 1 (11) -6 (12) $\frac{1}{8}$ (13) 1 (14) 1 (15) 8 (16) 2.

ಅಭ್ಯಾಸ 2

4. (i) $3\sqrt{2}$ (ii) 0 (iii) $5\sqrt[5]{3}+8\sqrt{2}$ (iv) $-7\sqrt{2}$
(v) $10\sqrt{2}-4\sqrt{3}$ (vi) $-7\sqrt[3]{3}+18\sqrt[3]{2}+15\sqrt{10}$

5. (i) 10 (ii) 2 (iii) 2 (iv) 3 (v) $\sqrt{15}+\sqrt{35}+\sqrt{6}+\sqrt{14}$
(vi) $3\sqrt{2}-4\sqrt{3}-4\sqrt{6}+16$ (vii) $5-2\sqrt{6}$
(viii) $2(1+\sqrt{3})$ (ix) $x+y+2\sqrt{xy}$ (x) $x^2-x-2\sqrt{x}-1$
(xi) $x-y-z^2$ (xii) $x^2-2xy+y^2$.

6. (i) $\frac{\sqrt{5}}{5}$, $4\sqrt{6}$, $\frac{\sqrt{30}}{9}$, $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{10}}{6}$
(ii) $\frac{3\sqrt{2}+4}{2}$, $\sqrt{7}+\sqrt{2}$, $3(\sqrt{5}-2)$, $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}$
(iii) $19+6\sqrt{10}$ (iv) $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$ (v) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ (vi) 6.

7. (i) $\sqrt{2}-1$ (ii) $\sqrt{5}+1$ (iii) $\sqrt{3}-1$
(iv) $\sqrt{7}+\sqrt{2}$ (v) $\sqrt{7}-\sqrt{2}$ (vi) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$
(vii) $3-\sqrt{3}$ (viii) $\sqrt{10}+\sqrt{6}$ (ix) $\sqrt{10}+\sqrt{2}$
(x) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ (xi) $\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (xii) $1-\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}$

ಅಭ್ಯಾಸ 3 (ಅ)

I. 2 $\sqrt{2}$ II. 10 III. (1) $4 \log y + 8 \log z - \log x$
(2) 0 (3) -1 (4) 4 ; (5) $\log a + 3 \log b - 2 \log c$
(6) 5 (7) $\log(x-1)$; (8) 0.

IV. (1) 3·2175 (2) 1·1761 (3) 1·7407 (4) 3·1553 (5) 2·29
(6) 4·8543.

ಅಭ್ಯಾಸ 3 (ಅ)

1. (i) 3 (ii) 4 (iii) $\bar{2}$ (iv) $\bar{1}$ (v) $\bar{5}$ (vi) 2
2. 14·17

3. (i) 1·093 (ii) 9149000 (iii) $0{\cdot}155 \times 10^{-8}$ (iv) 2·045
(v) 0·08206 (vi) 8·065 (vii) 0·0009315 (viii) 0·01047
(ix) 0·0407 (x) 2·021 (xi) 9·607 (xii) 1·665 (xiii) 21·9
(xiv) 26·92 (xv) 48·9.

4. (i) 3·363 (ii) 1·986 (iii) 2·123 (iv) 223·6

5. (i) $x = 0{\cdot}4974$ (ii) $x = 6{\cdot}288$ (iii) $x = \pm\, 0{\cdot}3010$
(iv) $x = -2{\cdot}1003$ (v) $x = 5{\cdot}189, y = -4{\cdot}157$
(vi) $x = -1{\cdot}563, y = 2{\cdot}425$.

ಅಭ್ಯಾಸ 4 (ಅ)

1. (i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{3}{2}$ (iii) $\frac{3}{7}$

2. (i) $\frac{9}{64}$ (ii) $\frac{3}{20b}$ (iii) $\frac{75}{32}$ (iv) $\frac{32}{9}$

5. $\frac{21}{10}$ (6) 15 ಮತ್ತು 18 (7) 24 ಮತ್ತು 32 ವರ್ಷಗಳು

8. 37 : 11 (9) 15 ಹುಡುಗರು ಮತ್ತು 20 ಹುಡುಗಿಯರು

10. (i) $\frac{-5 \pm \sqrt{97}}{18}$ (ii) -1 ಅಥವಾ $\frac{11}{2}$

11. ಹೆಂಡತಿಗೆ 10250 ರೂ. ಮತ್ತು ಮಗನಿಗೆ 6150 ರೂ. ಗಳು

12. 40 ಮತ್ತು 16 ರೂ. ಗಳು.

13. 36, 27 ಮತ್ತು 18 ಸೆಂ.ಮಿ. ಗಳು

14. 16, 24 ಮತ್ತು 32. ಸ್ಥಳಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 4 (ಅ)

1. (i) $\frac{9}{4}$ (ii) 27 (iii) $ab\sqrt{ab}$ (iv) $\frac{b^2}{a^2}$ (v) $\frac{16}{3}$

2. (i) $\frac{42}{5}$ (ii) $\frac{35}{3}$ (iii) $\frac{3a\sqrt{a}}{2}$ (iv) $a^{-3}\cdot b^{-1}$

3. (i) $a^8 b^8$ (ii) $15ab^2$ (iii) 16 (iv) $2\sqrt{5}$ (v) $3\sqrt{2}$

7. $\frac{b}{d}$

12. (i) 7 ಮತ್ತು 1 (ii) $\frac{224}{3}bd$ ಮತ್ತು $\frac{179}{6}bd$.

ಅಭ್ಯಾಸ 4 (ಇ)

1. (i) 2 (ii) 2 (iii) $3\sqrt{2}$ (iv) 1 (v) $\frac{1}{2b}$.

2. $\frac{1}{\sqrt{b}}$.

3. (i) 2 (ii) ± 12 (iii) $\frac{6}{a}$ (iv) 32 (v) $8\sqrt{3}$.

(4) 7 (7) 12·5 (10) 460 ರೂ. 80 ಪೈಸೆ (11) 10·19 ಸೆಂ. ಮೀ. (ಸುಮಾರಾಗಿ) (12) 49382·71 ಗಜ (13) 13. 67 ಸೆಂ. ಮೀ (14) 30. (15) 24 ಕಿ. ಗ್ರಾಂ. (16) (i) 192 (ii) 20 ಅಡಿ (17) 4·5, ಸೆಕೆಂಡುಗಳು.

ಅಭ್ಯಾಸ 5

I. (1) $\frac{2}{3}$, 9 (2) $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$ (3) 1, 4 (4) 1, $-\frac{1}{2}$ (5) 1, -1 (6) $\frac{7}{1}$, $-\frac{9}{4}$ (7) $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$ (8) 7, -5 (9) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ (10) -1, -2.

II. (1) $\frac{2\pm\sqrt{31}}{3}$ (2) $\frac{\sqrt{17}-3}{2}$, $-\frac{(\sqrt{17}+3)}{2}$ (3) $\frac{11\pm\sqrt{58}}{9}$

(4) $\frac{3}{4}$, $-\frac{4}{3}$ (5) $\frac{4c}{3}$, $-2c$ (6) $\frac{2}{3}$, $-\frac{5}{4}$

III. (1) $\frac{1 \pm 2i\sqrt{74}}{9b}$ (2) $\frac{3 \pm \sqrt{9 - 8k}}{4}$ (3) 1, 1 (4) $\frac{1 \pm i\sqrt{23}}{4}$

(5) $\frac{-3 \pm \sqrt{33}}{8}$ (6) $\frac{3}{2}, -\frac{3}{5}$ (7) $\frac{9 \pm \sqrt{73}}{2}$ (8) $\pm i\sqrt{3}$

(9) $\frac{3 \pm i\sqrt{7}}{4}$ (10) $\frac{-1 \pm i\sqrt{2}}{3}$

IV. (1) -80, ಊಹಾಮೂಲಗಳು (2) 25, ಪರಿಮೇಯ ಮೂಲಗಳು
(3) 361, ಪರಿಮೇಯ ಮೂಲಗಳು (4) 144, ಪರಿಮೇಯ ಮೂಲಗಳು.
(5) $-19p^2$, ಊಹಾಮೂಲಗಳು (6) 0, ನೈಜ ಹಾಗೂ ಸಮಮೂಲಗಳು

V. (1) $x^2 - 9x + 20 = 0$ (2) $x^2 - 10x + 21 = 0$
(3) $x^2 - 6x + 7 = 0$ (4) $2x^2 - 2x + 1 = 0$

VI. (1) $3x^2 - 19x + 31 = 0$ (2) $21x^2 - 138x + 175 = 0$
(3) $9x^2 - 3(7 + i\sqrt{11})x + 7i\sqrt{11} = 0$
(4) $243x^2 - 1575x + 3125 = 0$ (5) $5x^2 - 7x + 3 = 0$
(6) $45x^2 - 152x + 75 = 0$.

VII. (1) $3x^2 - (1 + 6\sqrt{-2})x + 2\sqrt{-2} = 0$
(2) $18x^2 + 7x - 1 = 0$ (3) $x^2 + 8x + 18 = 0$

VIII. (1) 4/3 (2) $\frac{539 + 48\sqrt{6}}{72}$ (3) $-\frac{44}{3}$

IX. (1) $\frac{b^2 - ca}{a^2}$ (2) $\frac{b^2 - 2ac}{ca}$ (3) $\frac{-(b^3 - 3abc)}{a^3}$ (4) $\frac{c^2 - ab}{ca}$
(5) $\frac{3abc^2 - b^3c}{a^4}$

X. $\frac{5 + \sqrt{127}}{4}$

ಅಭ್ಯಾಸ 6 (ಅ)

(1) (i) 434 (ii) 56, 504, 720, 120, 840, 720. (2) 120
(3) 117600 (4) (*a*) 120, (*b*) 60 (5) 78624000 (6) 1440

(7) 40320 (8) 7257600 (9) (*a*) 20160 (*b*) 4989600 (*c*) 90720 (*d*) 3360 (*e*) 6720. (10) 5040 (11) 518400 (12) (*a*) 1440 (*b*) 3600 (13) 720, 120.

ಅಭ್ಯಾಸ 6 (ಅ)

(1) (i) 35 (ii) 126 (iii) 220 (iv) 190 (v) 105 (vi) 23000 (vii) 1716.

(2) 63. (4) 53130 (5) 21728 (6) 220 (7) 84 (8) 21

(9) ${}^{42}c_6$, ${}^{38}c_6$. (10) (*i*) 3696 (ii) 10527.

ಅಭ್ಯಾಸ 7

II. (1) $489888\, a^5 b^4$ (2) $5148\, a^8$ (3) $70y^4$ (4) $-\frac{63}{8} x^{15}$

(5) $-15\,C_3 \cdot 2^3 \cdot 3^{12} \cdot x^{12}$ (6) 70 (7) 240 (8) $126\sqrt{x}$ ಮತ್ತು $-126/\sqrt{x}$. (9) $2145\sqrt{2}$, $2145/\sqrt{2}$ (10) $-4320\, a^3 b^3$

III. 0·816 (ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ). IV. 1·4956 V. 0·9606 VI. $1008\sqrt{15}$

ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ

ಅಧ್ಯಾಯ 1

ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಅಳತೆಗಳು

1.1 ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಗಿರುವ ಪ್ರವಣತೆಗೆ **ಕೋನ**ವೆಂದು ಹೆಸರು. ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ರೇಖಾಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಇದನ್ನು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯಲ್ಲಿ ಬರುವ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಿಗೆ ತಕ್ಕಂತೆ ಬದಲಾಯಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು ತನ್ನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಸುತ್ತಲೂ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿದಾಗ ಕೋನವು ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯು ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನವನ್ನು ಧನಾತ್ಮಕ ಕೋನವೆಂದೂ, ಪ್ರದಕ್ಷಿಣ ದಿಶೆಯಲ್ಲಿ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನವನ್ನು ಋಣಾತ್ಮಕ ಕೋನವೆಂದೂ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಕೋನಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ, +, − ಇರುತ್ತವೆ.

ಕೋನಗಳನ್ನು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಪರಿಭ್ರಮಣದ ಮೂಲಕ ನಿರ್ಧರಿಸುವುದರಿಂದ ಯಾವ ಪರಿಮಾಣದ ಕೋನವನ್ನು ಬೇಕಾದರೂ ಪಡೆಯಬಹುದು.

1.2 ಷಷ್ಟ್ಯಾಂಶ ಮತ್ತು ಶತಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಗಳು (Sexagesimal and Centesimal Systems)

ಷಷ್ಟ್ಯಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮಕೋನವನ್ನು 90 ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನೂ ಒಂದು ಡಿಗ್ರಿಯೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಡಿಗ್ರಿಯನ್ನೂ 60 ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಒಂದೊಂದನ್ನೂ ಒಂದು ಮಿನಿಟೆಂದೂ ಹಾಗೂ ಪ್ರತಿ ಮಿನಿಟನ್ನೂ ಮತ್ತೆ 60 ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿ ಒಂದೊಂದು ಭಾಗವನ್ನೂ ಒಂದು ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂದೂ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಡಿಗ್ರಿಯನ್ನು 1°, ಒಂದು ಮಿನಿಟನ್ನು $1'$ ಮತ್ತು ಒಂದು ಸೆಕೆಂಡನ್ನು $1''$ ಎಂಬ ಸಂಕೇತಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, 1 ಡಿಗ್ರಿ = 60 ಮಿನಿಟ್‌ಗಳು, 1 ಮಿನಿಟ್ = 60 ಸೆಕೆಂಡ್‌ಗಳು ಮತ್ತು 1 ಸಮಕೋನ = 90 ಡಿಗ್ರಿಗಳು.

ಶತಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮಕೋನವನ್ನು 100 ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮಭಾಗವನ್ನೂ ಒಂದು ಗ್ರೇಡ್ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಗ್ರೇಡನ್ನು 100 ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನೂ ಒಂದು ಮಿನಿಟ್ ಎಂದೂ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಿನಿಟನ್ನು ಮತ್ತೆ 100 ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿ ಒಂದೊಂದು ಸಮಭಾಗವನ್ನೂ ಒಂದು ಸೆಕೆಂಡ್ ಎಂದೂ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಗ್ರೇಡನ್ನು 1^g, ಒಂದು ಮಿನಿಟನ್ನು $1'$ ಮತ್ತು ಒಂದು ಸೆಕೆಂಡನ್ನು $1''$ ಎಂಬ ಸಂಕೇತಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

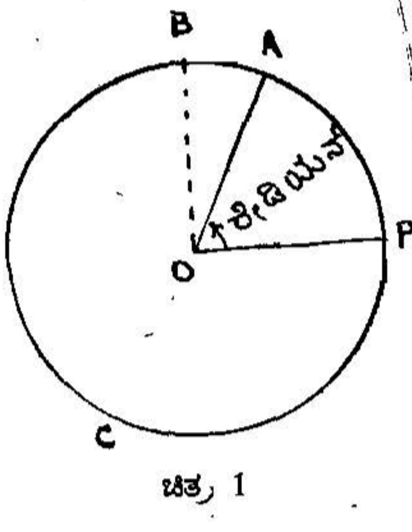
ಅಂದರೆ, $1^g = 100'$, $1' = 100''$ ಮತ್ತು 1 ಸಮಕೋನ $= 100^g$.

1.3 ರೇಡಿಯನ್ ಅಥವಾ ವರ್ತುಲೀಯ ಪದ್ಧತಿ

ಈ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ, ಒಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ಕಂಸವು ಆ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನವನ್ನು ಮೂಲಮಾನವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಕೋನವನ್ನು 'ರೇಡಿಯನ್' ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಮೂಲಮಾನವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ತಿಳಿಸಿರುವಂತೆ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಚಿತ್ರ 1 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ PABC ಎಂಬ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಅದರ ಕೇಂದ್ರ O ಆಗಿರಲಿ, ಹಾಗೂ ತ್ರಿಜ್ಯ $OP = r$ ಮಾನಗಳಾಗಿರಲಿ. ಕಂಸ PA ಕೂಡ r ಮಾನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಲಿ. OP ಮತ್ತು OA ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ. ಆಗ ಉಂಟಾಗುವ POA ಕೋನವನ್ನು ವರ್ತುಲೀಯ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಮೂಲಮಾನವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನೇ ಒಂದು 'ರೇಡಿಯನ್' ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು 1^c ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.



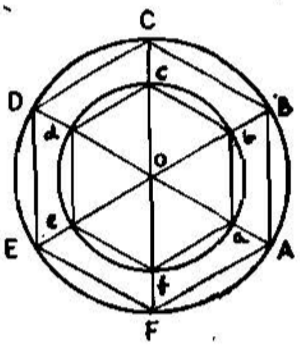
ಚಿತ್ರ 1

'ರೇಡಿಯನ್' ಎಂಬುದು ಒಂದು ನಿಶ್ಚಿತ ಬೆಲೆಯುಳ್ಳದ್ದು ಎಂದು ತೋರಿಸಬೇಕು. ಇದಕ್ಕೆ ಪೂರ್ವವಾಗಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸೋಣ :

ಪ್ರಮೇಯ : ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸಗಳ ಪ್ರಮಾಣವು ಒಂದು ನಿಶ್ಚಿತ ಬೆಲೆಯುಳ್ಳದ್ದಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ: ಏಕ ಕೇಂದ್ರೀಯವಾದ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 2). ಆ ಕೇಂದ್ರ O ಆಗಿರಲಿ.

ಹೊರ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ABCDEF.........n ಬಾಹುಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಸಮಭುಜಾಕೃತಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿ. ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಾದ OA, OB, OC, OD, OE...... ಸೇರಿಸಿ. ಇವು ಒಳವೃತ್ತವನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ a, b, c, d, e...... ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಈಗ ಒಳವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ $abcdef$......ಎಂಬುದೂ ಒಂದು n ಬಾಹುಗಳುಳ್ಳ ಸಮಭುಜಾಕೃತಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ (ರೇಖಾಗಣಿತದ ಪ್ರಕಾರ).



ಚಿತ್ರ 2

OA = OB, $Oa = Ob$, ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಸಮಾನಾಂತರ **ರೇಖೆಗಳ** ಗುಣಗಳ ಪ್ರಕಾರ ab ಮತ್ತು AB ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಆದುದರಿಂದ, $\frac{AB}{cb} = \frac{OA}{Oa}$. ಹಾಗೂ ABCDE......ಎಂಬುದು **ಸಮ**ಭುಜಾಕೃತಿಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆ $= n \cdot AB$.

$$\therefore \frac{ABCD\ldots \text{ಆಕೃತಿಯ ಸುತ್ತಳತೆ}}{abcd\ldots \text{ಆಕೃತಿಯ ಸುತ್ತಳತೆ}} = \frac{n \cdot AB}{n \cdot ab} = \frac{AB}{ab} = \frac{OA}{Oa} \quad \ldots (1)$$

ಬಾಹುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಅನಂತಕ್ಕೆ ಏರಿದಾಗ ಸಮಭುಜಾಕೃತಿಗಳ ಸುತ್ತಳತೆಗಳು ವೃತ್ತಗಳ ಪರಿಧಿಗೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

$$\text{ಅಂದರೆ,} \quad \frac{\text{ಹೊರವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ}}{\text{ಒಳವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ}} = \frac{OA}{Oa} = \frac{\text{ಹೊರವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ}}{\text{ಒಳವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ}}$$

$$\therefore \frac{\text{ಹೊರವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ}}{\text{ಹೊರವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ}} = \frac{\text{ಒಳವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ}}{\text{ಒಳವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ}}$$

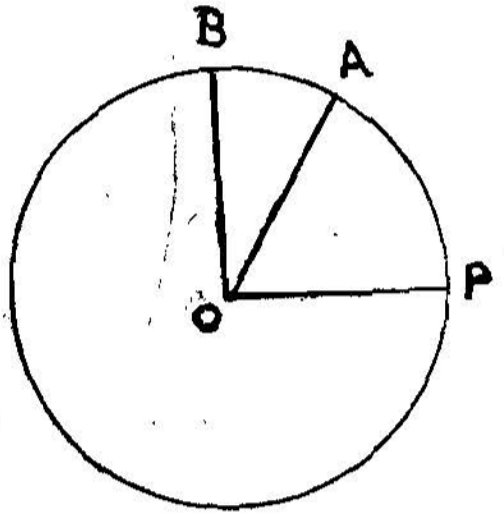
$$\text{ಅಥವಾ} \quad \frac{\text{ಹೊರವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ}}{\text{ಎರಡು ಪಟ್ಟು ಹೊರವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ}} = \frac{\text{ಒಳವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ}}{\text{ಎರಡು ಪಟ್ಟು ಒಳವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ}}$$

ಅಂದರೆ, ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ ಮತ್ತು ಅದರ ವ್ಯಾಸದ ಪ್ರಮಾಣವು ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಅಧೀನವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದುದರಿಂದ ಆ ಪ್ರಮಾಣವು ಒಂದು ನಿಶ್ಚಿತ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಈ ನಿಶ್ಚಿತ ಬೆಲೆಯನ್ನು π (ಪೈ) ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ **ಸೂಚಿಸ**

ಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು ಒಂದು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಇದರ ಬೆಲೆಯು ಸರಿ ಸುಮಾರಾಗಿ 3.1416 ಇರುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ವಾದಸರಣಿಯಿಂದ ನಾವು,

ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ$=\pi$ ಪಟ್ಟು ವ್ಯಾಸ ಅಥವಾ 2π ಪಟ್ಟು ತ್ರಿಜ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಾಧಿಸಿದ್ದೇವೆ.



ಚಿತ್ರ 3

ರೇಡಿಯನ್ ಒಂದು ನಿಶ್ಚಿತ ಬೆಲೆಯುಳ್ಳದ್ದು ಎಂಬುದನ್ನು ಈಗ ಸಾಧಿಸೋಣ :

ಚಿತ್ರ 3 ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ O ಕೇಂದ್ರವಾಗುಳ್ಳ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ OP$=$ತ್ರಿಜ್ಯ$=r$ ಆಗಿರಲಿ. ಕಂಸ AP$=$OP$=$ತ್ರಿಜ್ಯ$=r$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ, POA ಕೋನವು ಒಂದು 'ರೇಡಿಯನ್' ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಕಂಸ PB ಯು, ವೃತ್ತದ ಚತುರ್ಥ ಭಾಗವಾಗಿದ್ದರೆ, $\angle POB = 90°$, ಹಾಗೂ,

$$\text{ಕಂಸ PB ಯ ಉದ್ದ} = \frac{\text{ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ}}{4} = \frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi r}{2}$$

ರೇಖಾಗಣಿತದ ಪ್ರಕಾರ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಕೋನಗಳ ಪ್ರಮಾಣವು ಅವುಗಳನ್ನು ಉತ್ಪತ್ತಿ ಮಾಡುವ ಕಂಸಗಳ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$$\text{ಆದುದರಿಂದ, } \frac{\text{POA ಕೋನ}}{\text{POB ಕೋನ}} = \frac{\text{ಕಂಸ PA}}{\text{ಕಂಸ PB}} = \frac{r}{\pi r/2} = \frac{2}{\pi}$$

$$\therefore \text{POA ಕೋನ} = \frac{2}{\pi} \cdot \text{POB ಕೋನ}$$

ಆದರೆ POA ಕೋನವು ಒಂದು ರೇಡಿಯನ್ನಿಗೆ ಸಮ.

$$\therefore \text{ಒಂದು ರೇಡಿಯನ್} = \frac{2}{\pi}\text{POB ಕೋನ} = \frac{2}{\pi} \text{ ಸಮಕೋನ.}$$

ಸಮಕೋನವು ಒಂದು ನಿಶ್ಚಿತ ಬೆಲೆಯುಳ್ಳದ್ದು ಮತ್ತು π ಎಂಬುದೂ ಕೂಡ ಒಂದು ನಿಶ್ಚಿತ ಬೆಲೆಯುಳ್ಳದ್ದು ಎಂಬುದನ್ನು ಮೊದಲೇ ಸಾಧಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಆದುದರಿಂದ 'ರೇಡಿಯನ್' ಒಂದು ನಿಶ್ಚಿತ ಬೆಲೆಯುಳ್ಳದ್ದು.

ರೇಡಿಯನ್ ಯಾವಾಗಲೂ ನಿಶ್ಚಿತ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದರಿಂದ ಅದನ್ನು ವರ್ತುಲೀಯ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಯ ಮೂಲಮಾನವಾಗಿ ತೆಗೆದು ಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

1.4 ರೇಡಿಯನ್‌ನ ಬೆಲೆ

ಒಂದು ರೇಡಿಯನ್ $= \frac{2}{\pi}$ ಸಮಕೋನ $= \frac{2}{\pi} \times 90^\circ$

$$= \frac{180^\circ}{\pi} = 180^\circ \times 0{\cdot}318309......$$

$$= 57^\circ{\cdot}29577......$$

$= 57^\circ 14' 44''$ (ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ)

1.5 ಒಂದು ರೇಡಿಯನ್ $= \frac{2}{\pi}$ ಸಮಕೋನ.

$\therefore$ ಒಂದು ಸಮಕೋನ $= \frac{\pi}{2}$ ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳು

ಅಥವಾ $180^\circ = 2$ ಸಮಕೋನಗಳು $= \pi$ ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳು.

ಮತ್ತು $360^\circ = 4$ ಸಮಕೋನಗಳು $= 2\pi$ ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳು.

1.6 ವಿವಿಧ ಪದ್ಧತಿಗಳಿಗಿರುವ ಸಂಬಂಧ

$180^\circ = \pi$ ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳು ಎಂಬುದನ್ನು ಮೊದಲೇ ತೋರಿಸಿದೆ.

ಆದುದರಿಂದ, $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ ರೇಡಿಯನ್

ಅಥವಾ 1 ರೇಡಿಯನ್ $= \frac{180}{\pi}$ ಡಿಗ್ರಿ

ಅಲ್ಲದೆ $100^g = 1$ ಸಮಕೋನ $= 90^\circ$

ಅಥವಾ $200^g = 2$ ಸಮಕೋನಗಳು $= 180^\circ = \pi$ ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳು.

$\therefore \pi$ ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳು $= 180^\circ = 200^g$

ಈ ಸಂಬಂಧದಿಂದ, ಒಂದು ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಕೋನವನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಪದ್ಧತಿಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) 30° ಕೋನವನ್ನು ಶತಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿರಿ :

ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ, $90^\circ = 100^g$

$$\therefore 30^\circ = \frac{100 \times 30}{90} = 33\tfrac{1}{3} \text{ ಗ್ರೇಡ್‌ಗಳು.}$$

ಅಥವಾ $30^\circ = 33^g 33' 33''\cdot 3$ (ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ)

(2) 11 ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳನ್ನು ಶತಾಂಶ ಮತ್ತು ಷಷ್ಟ್ಯಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ

$\frac{\pi}{2}$ ರೇಡಿಯನ್ $= 100^g$

$$\therefore 11 \text{ ರೇಡಿಯನ್} = \frac{101 \times 11 \times 2}{\pi}$$

$$= \frac{100 \times 11 \times 2 \times 7}{22}$$

$$= 700^g$$

$\therefore$ 11 ರೇಡಿಯನ್ $= 700^g$

ಹಾಗೂ, $\frac{\pi}{2}$ ರೇಡಿಯನ್ $= 90^\circ$

$$\therefore 11 \text{ ರೇಡಿಯನ್} = \frac{90 \times 11 \times 2}{\pi}$$

$$= \frac{90 \times 11 \times 2 \times 7}{22}$$

$$= 630^\circ$$

$\therefore$ 11 ರೇಡಿಯನ್ $= 630^\circ$

ಅಭ್ಯಾಸ 1

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಕೋನಗಳನ್ನು ಶತಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ :

(i) 54° (ii) 72° (iii) 81° (iv) 120°

2. ಈ ಕೋನಗಳನ್ನು ವರ್ತುಲೀಯ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ :

(i) 70^g (ii) $110^g 50'$ (iii) 150^g (iv) 175^g

3. ಕೆಳಕಂಡ ಕೋನಗಳನ್ನು ಷಷ್ಟ್ಯಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ :

(i) 390^g (ii) 76^g (iii) 44 ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳು (iv) $\frac{2\pi}{5}$ ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳು.

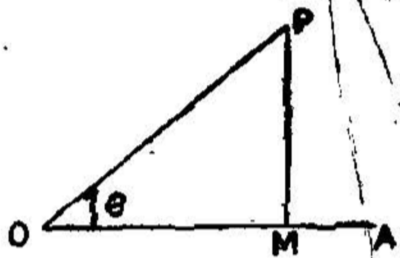
4. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಕೋನವು $\frac{\pi}{5}$ ಆಗಿದೆ, ಮತ್ತೊಂದು ಕೋನವು 65° ಆಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಮೂರನೆಯ ಕೋನದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಗ್ರೇಡ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

5. ಒಂದು ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಲಘು ಕೋನಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು $\frac{2\pi}{5}$ ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳು. ಆ ಕೋನಗಳನ್ನು ಡಿಗ್ರಿಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ

ಅಧ್ಯಾಯ 2

ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು

2.1 ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಲಘುಕೋನಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಅವುಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಅರ್ಥ ವಿವರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 4

OA ರೇಖೆಯು O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿ AOP ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲಿ (ಚಿತ್ರ 4). ಈ ಕೋನವನ್ನು 'θ' (ತೀಟ) ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸಿ. OP ರೇಖೆಯ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾದ P ಯಿಂದ OA ರೇಖೆಗೆ PM ಎಂಬ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಆಗ ಉಂಟಾದ OMP ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ 'θ' ಕೋನಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ OM ರೇಖೆಯನ್ನು **ಪಾರ್ಶ್ವ ಬಾಹು** ಎಂದೂ, PM ರೇಖೆಯನ್ನು **ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು** ಎಂದೂ ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ ; ಮೂರನೆಯ ಬಾಹುವಾದ OP ಯನ್ನು **ಕರ್ಣ (hypotenuse)** ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಒಂದೊಂದು ಬಾರಿಗೆ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅವುಗಳ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತಾ ಹೋದರೆ ಒಟ್ಟು ಆರು ಪ್ರಮಾಣಗಳು ದೊರಕುತ್ತವೆ. ಅವುಗಳನ್ನು θ ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಆ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ:

$$\frac{PM}{OP} = \frac{\text{ಲಂಬರೇಖೆ (ಅಭಿಮುಖಬಾಹು)}}{\text{ಕರ್ಣ}} = \text{ಸೈನ್ } AOP = \text{ಸೈನ್ } \theta$$

$$\frac{OM}{OP} = \frac{\text{ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು}}{\text{ಕರ್ಣ}} = \text{ಕೋಸೈನ್ } AOP = \text{ಕೋಸೈನ್ } \theta$$

$$\frac{PM}{OM} = \frac{\text{ಅಭಿಮುಖಬಾಹು}}{\text{ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು}} = \text{ಟ್ಯಾಂಜೆಂಟ್ } AOP = \text{ಟ್ಯಾಂಜೆಂಟ್ } \theta$$

$$\frac{OM}{PM} = \frac{\text{ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು}}{\text{ಅಭಿಮುಖಬಾಹು}} = \text{ಕೋಟ್ಯಾಂಜೆಂಟ್ } AOP$$

$$= \text{ಕೋಟ್ಯಾಂಜೆಂಟ್ } \theta$$

$$\frac{OP}{OM} = \frac{\text{ಕರ್ಣ}}{\text{ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು}} = \text{ಸೀಕೆಂಟ್ } AOP = \text{ಸೀಕೆಂಟ್ } \theta$$

$$\frac{OP}{PM} = \frac{\text{ಕರ್ಣ}}{\text{ಅಭಿಮುಖಬಾಹು}} = \text{ಕೋಸೀಕೆಂಟ್ } AOP = \text{ಕೋಸೀಕೆಂಟ್ } \theta$$

ಮೇಲ್ಕಂಡ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ಸೈನ್ θ ($\sin\theta$), ಕಾಸ್ θ ($\cos\theta$), ಟ್ಯಾನ್ θ ($\tan\theta$), ಕಾಟ್ θ ($\cot\theta$), ಸೀಕೆಂಟ್ θ ($\sec\theta$) ಮತ್ತು ಕೋಸೀಕೆಂಟ್ θ ($\operatorname{cosec}\theta$) ಎಂಬುದಾಗಿ ಬರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳಿಂದ, ಒಂದು ಕೋನದ sin ಮತ್ತು cosec ಪ್ರಮಾಣಗಳು, cos ಮತ್ತು sec ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಹಾಗೂ tan ಮತ್ತು cot ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.

ಅಂದರೆ, θ ಎನ್ನುವುದು ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಕೋನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ,

$$\sin\theta \cdot \operatorname{cosec}\theta = 1 \qquad \text{(i)}$$

$$\cos\theta \cdot \sec\theta = 1 \qquad \text{(ii)}$$

$$\tan\theta \cdot \cot\theta = 1 \qquad \text{(iii)}$$

2.2 ಒಂದು ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕೆಲವು ಮೂಲ ಸಂಬಂಧಗಳು

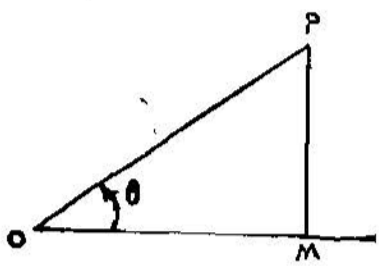
θ ಎನ್ನುವುದು ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಕೋನವಾಗಿದ್ದರೆ,

ಆಗ, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \text{(iv)}$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \qquad \text{(v)}$$

$$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta \qquad \text{(vi)}$$

ಸಾಧನೆ : OA ಸರಳರೇಖೆಯು O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿ AOP ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟು ಮಾಡಲಿ. ಇದನ್ನು θ ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸಿ. PM ರೇಖೆಯು OAಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 5).



ಚಿತ್ರ 5

ಈಗ, OMP ಸಮಕೋನತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ,

$$\sin\theta = \frac{PM}{OP}, \quad \cos\theta = \frac{OM}{OP}$$

$$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{PM^2}{OP^2} + \frac{OM^2}{OP^2}$$

$$= \frac{PM^2 + OM^2}{OP^2}$$

$$= \frac{OP^2}{OP^2}$$ [ಪೈಥಾಗೊರನ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ $PM^2 + OM^2 = OP^2$]

$$= 1.$$

$$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

ಅದೇ ರೀತಿ, OMP ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ,

$$\tan\theta = \frac{PM}{OM}, \sec\theta = \frac{OP}{OM}$$

$$\therefore 1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{PM^2}{OM^2}$$

$$= \frac{OM^2 + PM^2}{OM^2}$$

$$= \frac{OP^2}{OM^2} \quad [\because OM^2 + PM^2 = OP^2]$$

$$= \sec^2\theta$$

$$\therefore 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta.$$

ಚಿತ್ರ 5 ರಿಂದ,

$\cot\theta = \frac{OM}{PM}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{PM}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಆದುದರಿಂದ, $1 + \cot^2\theta = 1 + \frac{OM^2}{PM^2} = \frac{PM^2 + OM^2}{PM^2}$

$$= \frac{OP^2}{PM^2} \quad [\because PM^2 + OM^2 = OP^2]$$

$$= \operatorname{cosec}^2\theta$$

$$\therefore 1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$$

ಸಮೀಕರಣ (iv) ರಿಂದ, ಒಂದು ಕೋನದ sin ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು cos ಪ್ರಮಾಣದ ರೂಪದಲ್ಲೂ, cos ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು sin ಪ್ರಮಾಣದ ರೂಪದಲ್ಲೂ ಬರೆಯಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.

ಎಂದರೆ,

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ ಎಂದೂ,

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಅದೇ ರೀತಿ, ಸಮೀಕರಣ (v) ರಿಂದ,

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ ಮತ್ತು $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$ ಎಂದೂ,

ಸಮೀಕರಣ (vi) ರಿಂದ,

$\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$ ಮತ್ತು $\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1$ ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳ :

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ:

(1) $\tan A + \cot A = \sec A \cdot \operatorname{cosec} A$

$$\text{ಎಡಬದಿ} = \tan A + \cot A$$

$$= \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A}$$

$$= \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos A \cdot \sin A}$$

$$= \frac{1}{\cos A \cdot \sin A}$$

$$= \sec A \cdot \operatorname{cosec} A = \text{ಬಲಬದಿ}.$$

$\therefore \tan A + \cot A = \sec A \cdot \operatorname{cosec} A.$

(2) $\sqrt{\dfrac{1 - \sin A}{1 + \sin A}} = \sec A - \tan A$

$$\text{ಬಲಬದಿ} = \sec A - \tan A$$

$$= \frac{1}{\cos A} - \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$= \frac{1 - \sin A}{\cos A}$$

$$= \frac{1 - \sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$$

$$= \frac{1 - \sin A}{\sqrt{(1 - \sin A)} \cdot \sqrt{(1 + \sin A)}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - \sin A}}{\sqrt{1 + \sin A}} = \text{ಎಡಬದಿ}$$

$$\therefore \sqrt{\frac{1 - \sin A}{1 + \sin A}} = \sec A - \tan A.$$

(3) $\dfrac{1 + \cos A}{\cos A} - \dfrac{1 + \sin A}{\sin A} = \sec A - \operatorname{cosec} A.$

$$\text{ಎಡಬದಿ} = \frac{1}{\cos A} + \frac{\cos A}{\cos A} - \frac{1}{\sin A} - \frac{\sin A}{\sin A}$$

$$= \sec A + 1 - \operatorname{cosec} A - 1$$

$$= \sec A - \operatorname{cosec} A = \text{ಬಲಬದಿ}$$

$$\therefore \frac{1 + \cos A}{\cos A} - \frac{1 + \sin A}{\sin A} = \sec A - \operatorname{cosec} A.$$

ಅಭ್ಯಾಸ 2 (ಅ)

ಕೆಳಕಂಡ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ :

(1) $\sin^2 A - \cos^2 A + 1 = \dfrac{2}{\operatorname{cosec}^2 A}$

(2) $\dfrac{\sin^3 A - \cos^3 A}{\sin A - \cos A} = 1 + \sin A \cdot \cos A.$

(3) $\tan^2 \theta - \cot^2 \theta = \sec^2 \theta - \operatorname{cosec}^2 \theta$

(4) $\operatorname{cosec} A + \cot A = \sqrt{\dfrac{1 + \cos A}{1 - \cos A}}$

(5) $\dfrac{1 - \cos B}{\sin B} + \dfrac{\sin B}{1 - \cos B} = 2 \operatorname{cosec} B$

(6) $\dfrac{\sec \theta}{\tan \theta + \cot \theta} = \sin \theta$

(7) $\dfrac{1 + \sin A}{1 - \sin A} - \dfrac{1 - \sin A}{1 + \sin A} = 4 \sec A \tan A$

(8) $\dfrac{\tan x + \sec x - 1}{\tan x - \sec x + 1} = \sec x + \tan x$

(9) $\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta} = \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta$

(10) $\dfrac{\sec A - \sec B}{\tan A - \tan B} = \dfrac{\tan A + \tan B}{\sec A + \sec B}$

(11) $\sin^2 A \cdot \cot^2 A \cdot \cos^2 A \cdot \tan^4 A \cdot \operatorname{cosec}^4 A = 1$

(12) $(\sin A + \cos A - 1)(\sin A + \cos A + 1) = 2\sin A \cdot \cos A.$

(13) $\dfrac{\sec A + \tan A}{\sec A - \tan A} = \sec^2 A + 2\tan A.$

(14) $\dfrac{\cos A + \sin A}{\cos A} + \dfrac{\cos A - \sin A}{\sin A} = \sec A \cdot \operatorname{cosec} A.$

(15) $\dfrac{\cot x + \cot y}{\operatorname{cosec} x + \operatorname{cosec} y} = \dfrac{\operatorname{cosec} x - \operatorname{cosec} y}{\cot x - \cot y}$

2.3 ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಅತ್ಯಧಿಕ ಬೆಲೆ

ಮೂಲ ಸಂಬಂಧಗಳ ಪ್ರಕಾರ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

ಇಲ್ಲಿ $\sin^2\theta$ ಮತ್ತು $\cos^2\theta$ ಗಳು ವರ್ಗ ರೂಪಗಳಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ ಅವು ಧನ ಚಿಹ್ನೆಯುಳ್ಳವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ 1 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಮೊತ್ತ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ [ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\sin^2\theta$ ಎಂಬುದರ ಬೆಲೆಯು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ $\cos^2\theta$ ಎಂಬುದರ ಬೆಲೆಯು ಋಣ ಚಿಹ್ನೆಯುಳ್ಳದ್ದಾಗಿರಬೇಕು. ಇದು ಅಸಾಧ್ಯ, ಏಕೆಂದರೆ $\cos^2\theta$ ಯಾವಾಗಲೂ ಧನ ಚಿಹ್ನೆಯುಳ್ಳದ್ದಾಗಿರುತ್ತದೆ].

ಇತರ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಬೇರೆ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ.

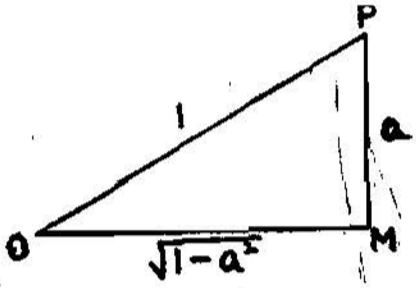
2.4 ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ದತ್ತ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವಿಕೆ (ಅಥವಾ ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಉಳಿದೆಲ್ಲ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿಕೆ)

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

$\sin\theta = a$ ಆಗಿದ್ದಾಗ θ ಕೋನದ ಉಳಿದೆಲ್ಲ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

OMP ಒಂದು ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 6).
ಕೋನ MOP $= \theta$, PM $= a$ ಮತ್ತು OP $= 1$
ಆಗಿದ್ದಾಗ,

$\sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{a}{1}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 6

ಈಗ, OMP ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, $OP^2 = OM^2 + PM^2$

$$\therefore OM^2 = OP^2 - PM^2$$
$$= 1 - a^2$$
$$\therefore OM = \sqrt{1-a^2}$$

ಅದೇ ತ್ರಿಭುಜದಿಂದ,

$$\cos\theta = \frac{OM}{OP} = \sqrt{1-a^2} = \sqrt{1-\sin^2\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$

$$\cot\theta = \frac{OM}{PM} = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} = \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{PM} = \frac{1}{a} = \frac{1}{\sin\theta}$$

(2) $\tan\theta = b$ ಆಗಿದ್ದರೆ, θ ಕೋನದ ಉಳಿದೆಲ್ಲ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ:
ಮೂಲ ಸಂಬಂಧಗಳ ಪ್ರಕಾರ,

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $\sec\theta = \pm\sqrt{1+\tan^2\theta}$
$$= \pm\sqrt{1+b^2}$$

$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $\cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$
ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$\sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$$\sin\theta = \pm\sqrt{1-\frac{1}{1+b^2}} = \pm\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}$$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $\operatorname{cosec}\theta = \pm\frac{\sqrt{1+b^2}}{b}$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $\cot\theta = \frac{1}{b}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಮೊದಲನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಒಂದು ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಯೂ, ಎರಡನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಮೂಲ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಯೂ ಮಾಡಿ ತೋರಿಸಿದೆ. ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟ ಹಾಗೇಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಜ್ಞಾಪಕದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಆ ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರನೆಯ ಬಾಹುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ ಉಳಿದೆಲ್ಲ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಸುಲಭ. ಎರಡನೆಯ ಉದಾಹರಣೆಯ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಬೇಕಾದರೆ ಮೂಲ ಸೂತ್ರಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಜ್ಞಾಪಕದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2 (ಅ)

(1) $\cos A = \frac{4}{5}$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $\tan A - \sec A$ ಎಂಬುದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(2) $\sin A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ಆಗಿದ್ದಾಗ, ಉಳಿದೆಲ್ಲ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(3) $\cot\theta = \frac{6}{\sqrt{13}}$ ಆಗಿದ್ದರೆ θ ಕೋನದ ಇತರ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(4) $\tan\theta = \frac{8}{15}$ ಆದರೆ, ಆಗ $\cos\theta$ ಮತ್ತು $\operatorname{cosec}\theta$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(5) cosec A $= \frac{3}{2}$ ಆಗಿದ್ದಾಗ, sec A ಮತ್ತು cot A ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(6) sec A $= \sqrt{2}$ ಆಗಿದ್ದರೆ, sin A ಮತ್ತು tan A ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(7) sin A $= \frac{9}{41}$ ಆದಾಗ, $\frac{\operatorname{cosec} A + \cot A}{\operatorname{cosec} A - \cot A}$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(8) tan A $= \sqrt{3}$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $\sin A \cdot \cos A - \cos A \cdot \cot A = \frac{1}{4\sqrt{3}}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

2.5 ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು

(i) 45° ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು :

OMP ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 7).

ಅಂದರೆ ಆ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ OM = PM = b (ಉದಾಹರಣೆಗೆ)

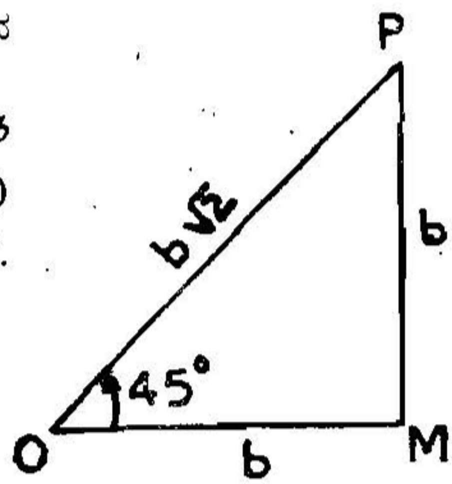
$\underline{|MOP} = 45° = \underline{|MPO}$, $\underline{|OMP} = 90°$.

ಹಾಗೂ OMP ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ,

$$OP^2 = OM^2 + PM^2$$

$$\therefore OP^2 = b^2 + b^2$$

$$\therefore OP = b\sqrt{2}$$



ಚಿತ್ರ 7

ಅದೇ ತ್ರಿಭುಜದಿಂದ,

$$\sin 45° = \sin \underline{|MOP} = \frac{PM}{OP} = \frac{b}{b\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45° = \cos \underline{|MOP} = \frac{OM}{OP} = \frac{b}{b\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45° = \tan \underline{|MOP} = \frac{MP}{OM} = \frac{b}{b} = 1$$

$$\cot 45° = \frac{1}{\tan 45°} = 1$$

$$\sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}$$

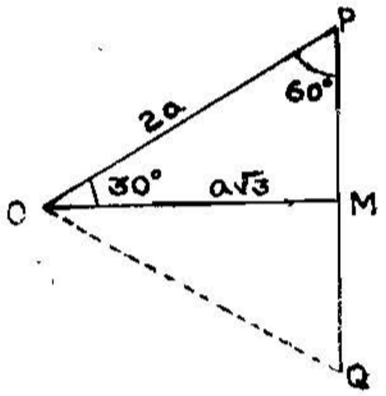
(ii) 30° ಮತ್ತು 60° ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು :

OQP ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 8)

ಆಗ, $\angle O = \angle Q = \angle P = 60^\circ$ ಮತ್ತು

$OQ = QP = PO$.

M ಎಂಬುದು PQ ರೇಖೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 8

ಆಗ M ಬಿಂದುವನ್ನು O ಬಿಂದುವಿಗೆ ಸೇರಿಸುವ MO ರೇಖೆಯು POQ ಕೋನವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು PQ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈಗ PM ರೇಖೆಯ ಉದ್ದ a ಆದರೆ, $OP = PQ = 2a$.

ಮತ್ತು OMP ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿರುವುದರಿಂದ,

$$OM = \sqrt{OP^2 - PM^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$$

ಅಲ್ಲದೆ, $\angle MPO = 60^\circ$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $\angle MOP = 30^\circ$ ಆದುದರಿಂದ,

$$\sin 30^\circ = \frac{PM}{OP} = \frac{a}{2a} = \tfrac{1}{2} = \cos 60^\circ$$

$$\cos 30^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$$

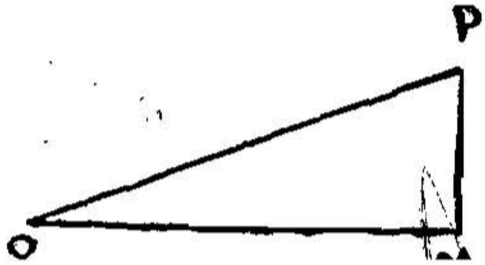
$$\tan 30^\circ = \frac{PM}{OM} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cot 60^\circ$$

$$\cot 30^\circ = \frac{OM}{PM} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} = \tan 60^\circ$$

$$\sec 30^\circ = \frac{OP}{OM} = \frac{2a}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \operatorname{cosec} 60^\circ$$

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{OP}{PM} = \frac{2a}{a} = 2 = \sec 60^\circ.$$

(iii) 0° ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು:



ಚಿತ್ರ 9

OM ಸರಳರೇಖೆಯು 'O' ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿ MOP ಎಂಬ ಅತಿ ಸಣ್ಣ ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲಿ (ಚಿತ್ರ 9). ಇದಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿ ಲಂಬರೇಖೆಯಾದ PM ನ ಉದ್ದ ಬಹು ಸಣ್ಣದಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗೂ OP ರೇಖೆಯು OM ರೇಖೆಯ ಕಡೆಗೆ ಸರಿದಂತೆ MOP ಕೋನವು 0° ಕಡೆಗೆ ಸರಿಯುತ್ತದೆ ಮತ್ತು PM ನ ಉದ್ದವು ಶೂನ್ಯದ ಕಡೆಗೆ ಸರಿಯುತ್ತದೆ.

ಆದುದರಿಂದ, $\sin 0^\circ = \underset{OP \to OM}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{PM}{OP} = \frac{0}{OM} = 0$

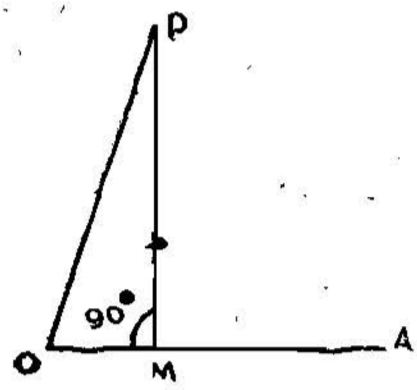
$$\cos 0^\circ = \underset{OP \to OM}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{OM}{OP} = \frac{OM}{OM} = 1$$

$$\tan 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0,$$

$$\operatorname{cosec} 0^\circ = \frac{1}{\sin 0^\circ} = \frac{1}{0} = \infty \text{ (ಅನಂತ)},$$

$$\sec 0^\circ = \frac{1}{\cos 0^\circ} = 1, \; \cot 0^\circ = \frac{1}{\tan 0^\circ} = \frac{1}{0} = \infty$$

(iv) 90° ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು:



ಚಿತ್ರ 10

AOP ಕೋನವು ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ 90° ಇರಲಿ ಮತ್ತು OMP ಕೋನವು ಸರಿಯಾಗಿ 90° ಇರಲಿ (ಚಿತ್ರ 10). AOP ಕೋನವು OMP ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮನಾದಾಗ O ಬಿಂದುವು M ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗೂ OP ರೇಖೆಯು PM ರೇಖೆಗೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದುದರಿಂದ, $\sin 90^\circ = \frac{MP}{OP} = 1$

$$\cos 90^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{0}{OP} = 0$$

$$\tan 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0} = \infty \text{ (ಅನಂತ)}, \quad \cot 90^\circ = \frac{1}{\tan 90^\circ} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\sec 90^\circ = \frac{1}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0} = \infty \text{ (ಅನಂತ)}, \quad \text{cosec } 90^\circ = \frac{1}{\sin 90^\circ} = 1$$

2.6 ಉಪಯುಕ್ತವಾದ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಪಟ್ಟಿ

ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಜ್ಞಾಪಕದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಅನುಕೂಲಗಳುಂಟು. ಆದುದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದೆ:

ಕೋನ	sine	cosine	tangent	cotangent	secant	cosecant
0°	0	1	0	∞	1	∞
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
90°	1	0	∞	0	∞	1

ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯ ಪ್ರಕಾರ ಕೋನ sin, cos ಮತ್ತು tan ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಜ್ಞಾಪಕದಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಂಡರೆ ಉಳಿದ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವುದು ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ,

ಅಭ್ಯಾಸ 2 (ಇ)

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ತಾಳೆಹಾಕಿನೋಡಿರಿ :

(1) $\cos 60^\circ = \cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ = 1 - 2\sin^2 30^\circ$

(2) $\sin 90^\circ = 2\sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ$ (3) $\tan 60^\circ = \dfrac{2\tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ}$

(4) $\cos 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \cdot \sin 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(5) $\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ = \sin 30^\circ$

(6) $\cos 60^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 60^\circ \cdot \sin 30^\circ = \cos 90^\circ$

ಇವುಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರಿ :

(7) $\cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ - \cos 30^\circ \cdot \sin 60$

(8) $\cos^2 60^\circ + \sin^2 30^\circ + \tan^2 45^\circ$

(9) $(\sin 60^\circ + \cos 30^\circ)\,(\sin 60^\circ - \cos 30^\circ)$

(10) $(\cot 30^\circ + \tan 30^\circ)\,(\cot 30^\circ - \tan 30^\circ)$

(11) $\dfrac{\operatorname{cosec} 30^\circ + \operatorname{cosec} 60^\circ + \operatorname{cosec} 90^\circ}{\sec 0^\circ + \sec 30^\circ + \sec 60^\circ} = 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(12) $\dfrac{\sin^2 60^\circ + \tan 45^\circ - \operatorname{cosec}^2 30^\circ}{\cos^2 30^\circ + \cot 45^\circ - \sec^2 60^\circ} = 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(13) $\tan^2 30^\circ + \tan^2 45^\circ + \tan^2 60^\circ = 4\frac{1}{3}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(14) $\operatorname{cosec}^2 60^\circ \cdot \sec^2 30^\circ \cdot \sin^2 30^\circ \cdot \cos^2 45^\circ = \frac{2}{9}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ

(15) $4\tan^2 45^\circ - \operatorname{cosec}^2 30^\circ + 3\cot^2 60^\circ = 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ

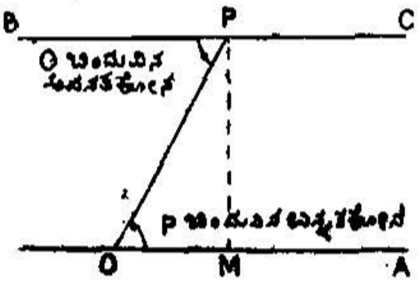
ಅಧ್ಯಾಯ 3

ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ದೂರಗಳು

ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ದೂರಗಳ ಮೇಲಿನ ಕೆಲವು ಸುಲಭವಾದ ಲೆಕ್ಕಗಳು

ಇಲ್ಲಿ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ದೂರಗಳನ್ನು ಅಳತೆಯನ್ನು ಮಾಡದೆ ಬರಿಯ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರದಿಂದಲೇ ಯಾವರೀತಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಲೆಕ್ಕಾಚಾರಕ್ಕೆ ಸೂಕ್ತವಾದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ O ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಅದರ ಮೂಲಕ OA ಎಂಬ ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 11). ಸಮತಲದ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ P ಎಂಬ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದರಿಂದ OAಗೆ PM ಎಂಬ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಹಾಗೂ P ಮೂಲಕ BPC ಎಂಬ ಮತ್ತೊಂದು ಕ್ಷಿತಿಜ (Horizontal) ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇದು OA ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿಯೇ ಇರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 11

ಉನ್ನತಕೋನ (Angle of Elevation)

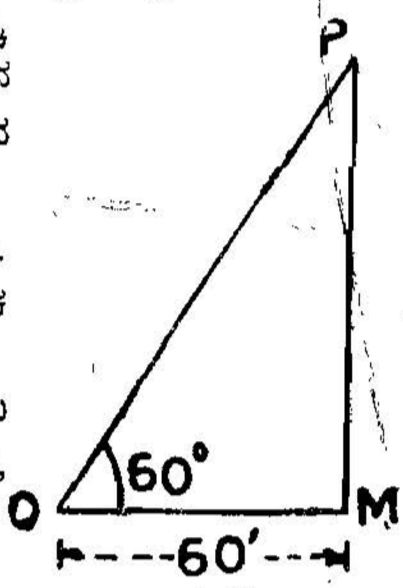
ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : ಚಿತ್ರ 11ರಲ್ಲಿ O ಎಂಬುದು ವೀಕ್ಷಣ ಬಿಂದುವಾಗಿದ್ದು P ಎಂಬುದು ವೀಕ್ಷಣ ವಸ್ತುವಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ ವೀಕ್ಷಣ ರೇಖೆಯಾದ OP, O ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆಯಾದ OAಯೊಡನೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನವನ್ನು, O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಉನ್ನತಕೋನ ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ, MOP ಎಂಬುದು O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಉನ್ನತಕೋನ.

ಅವನತಕೋನ (Angle of Depression)

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: OP ರೇಖೆಯು P ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಎಳೆದಿರುವ ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆಯಾದ BPC ಯೊಡನೆ ಮಾಡುವ ಕೋನವನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೀಕ್ಷಿಸಿದ O ಬಿಂದುವಿನ ಅವನತಕೋನವೆಂದು ಕರೆಯಬಹುದು. ಎಂದರೆ, ಚಿತ್ರ 11ರಲ್ಲಿ P ಎಂಬುದು ವೀಕ್ಷಣ ಬಿಂದುವಾಗಿಯೂ, O ಎಂಬುದು ವೀಕ್ಷಣ ವಸ್ತುವಾಗಿಯೂ ಇರುತ್ತದೆ; ಮತ್ತು BPO ಎಂಬುದು O ಬಿಂದುವಿನ ಅವನತಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) ಒಂದು ಆಡುವ ಮೈದಾನದಲ್ಲಿ ನೇರವಾಗಿ ನಿಲ್ಲಿಸಿರುವ ಕೋಲಿನ ತುದಿಯು ಅದರ ಬುಡದಿಂದ 60 ಅಡಿ ದೂರದಲ್ಲಿ ನಿಂತಿರುವ ಒಬ್ಬನ ಕಣ್ಣಿನ ಬಳಿ 60° ಉನ್ನತ ಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ. ಆತನ ಎತ್ತರಕ್ಕೆ ಗಣನೆ ಕೊಡದೆ ಕೋಲಿನ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಕೋಲಿನ ತುದಿಗೂ ಅವನು ನೋಡುತ್ತಿರುವ ಸ್ಥಳಕ್ಕೂ ಇರುವ ನೇರವಾದ ದೂರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 12

O → ವೀಕ್ಷಣ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 12).
OM → ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ O ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆಯಾಗಿರಲಿ.
ಕೋಲನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ PM, OM ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ (ದತ್ತ) ಹಾಗೂ $\underline{|MOP} = 60°$, OM = 60 ಅಡಿ ಎಂದು ಕೊಟ್ಟಿದೆ.
PMನ ಅಳತೆ x ಅಡಿಗಳಾಗಿರಲಿ.
ಈಗ, OMP ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ,

$$\tan MOP = \tan 60° = \frac{PM}{OM} = \frac{x}{60}$$

$$\therefore\ x = 60 \tan 60°$$

$$= 60\sqrt{3}$$

ಅಥವಾ $x = 103.9$ ಅಡಿಗಳು (ಸುಮಾರಾಗಿ)

OP ರೇಖೆಯು O ಯಿಂದ Pಗೆ ಇರುವ ದೂರವನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದರೆ, ಆಗ, ಮತ್ತೆ ಅದೇ ತ್ರಿಭುಜದಿಂದ,

$$\cos MOP = \cos 60° = \frac{OM}{OP} = \frac{60}{OP}$$

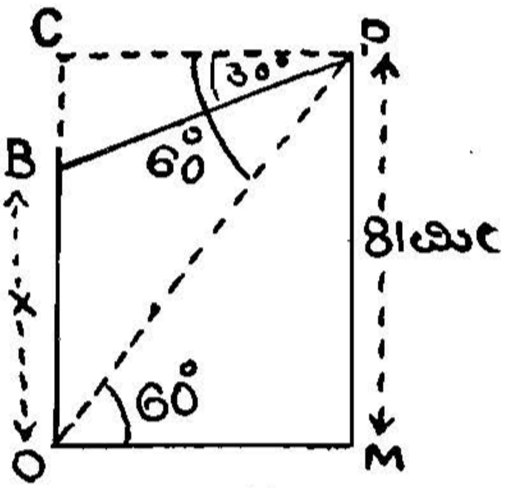
$$\therefore\ OP = \frac{60}{\cos 60°} = \frac{60}{\frac{1}{2}} = 120 \text{ ಅಡಿಗಳು.}$$

ಆದುದರಿಂದ, ಕೋಲಿನ ಎತ್ತರ = 103·9 ಅಡಿಗಳು (ಸುಮಾರಾಗಿ).
ವೀಕ್ಷಣ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಕೋಲಿನ ತುದಿಗೆ ಇರುವ ದೂರ = 120 ಅಡಿಗಳ

(2) 81 ಮೀಟರ್ ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಂದು ಗುಡ್ಡದಿಂದ ಒಂದು ಗೋಪುರವನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸಿದಾಗ ಆ ಗೋಪುರದ ಮೇಲ್ಭಾಗ ಮತ್ತು ಕೆಳ ಭಾಗಗಳು 30° ಮತ್ತು 60° ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿದಂತೆ ಕಾಣುತ್ತವೆ. ಹಾಗಿದ್ದರೆ ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಗುಡ್ಡದ ಬುಡದಿಂದ ಗೋಪುರದ ಬುಡಕ್ಕೆ ಇರುವ ದೂರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

OM → ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ಎಳೆದ ಕ್ಷಿತಿಜ ರೇಖೆಯಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 13). PM → ಗುಡ್ಡದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ ಹಾಗೂ ಅದು OM ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರಲಿ. P → ವೀಕ್ಷಣ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.

B ಮತ್ತು O ಬಿಂದುಗಳು ಗೋಪುರದ ತುದಿ ಮತ್ತು ತಳ ಭಾಗವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ. OB = x ಮೀ. ಆಗಿರಲಿ. CP ಎಂಬುದು P ಮೂಲಕ OM ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ರೇಖೆ (ಕ್ಷಿತಿಜರೇಖೆ)ಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ.



ಚಿತ್ರ 13

ಆಗ $\angle BPC = 30°$ ಮತ್ತು $\angle OPC = 60°$.

ಹಾಗೂ, $\angle MOP = \angle OPC = 60°$, $BC = OC - OB = 81 - x$.

ಈಗ, OMP ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ,

$$\tan MOP = \tan 60° = \frac{PM}{OM} = \frac{81}{OM}$$

$$\therefore\ OM = \frac{81}{\tan 60°} = \frac{81}{\sqrt{3}} = \frac{81\sqrt{3}}{3} = 27\sqrt{3}$$ ಮೀಟರ್‌ಗಳು.

ಅದೇ ರೀತಿ, PCB ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ,

$$\tan BPC = \tan 30° = \frac{BC}{PC} = \frac{BC}{OM} \qquad (\because\ PC = OM)$$

ಅಂದರೆ, $\tan 30° = \dfrac{BC}{27\sqrt{3}}$

ಅಥವಾ, $BC = 27\sqrt{3}\tan 30°$

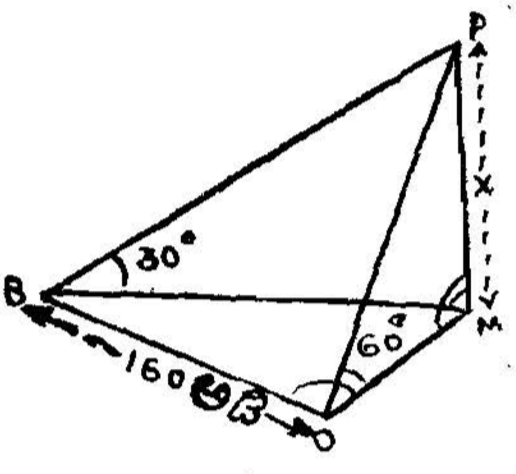
$$\text{ಅಂದರೆ, } 81 - x = 27\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 27$$

$$\therefore\ x = 81 - 27 = 54$$

$\therefore$ ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ $= 54$ ಮೀಟರ್‌ಗಳು ಮತ್ತು ಗುಡ್ಡದ ಬುಡದಿಂದ ಗೋಪುರದ ಬುಡಕ್ಕೆ ಇರುವ ದೂರ $= 27\sqrt{3}$ ಮೀಟರ್‌ಗಳು.

(3) ಒಬ್ಬನು ಒಂದು ಗೋಪುರದ ದಕ್ಷಿಣ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೋ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೀಕ್ಷಿಸಿದಾಗ ಆ ಗೋಪುರದ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 60° ಇರುತ್ತದೆ. ಅವನು ಆ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ 160 ಅಡಿ ದೂರ ಪಶ್ಚಿಮಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸಮತಲ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿಯೇ ಹೋಗಿ ಅಲ್ಲಿಂದ ವೀಕ್ಷಿಸಿದಾಗ ಆ ಗೋಪುರದ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 30° ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಗೋಪುರದ ಬುಡದಿಂದ ಮೊದಲನೆಯ ವೀಕ್ಷಣ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಇರುವ ದೂರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

PM, ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ (ಚಿತ್ರ 14). ಮತ್ತು PM $= x$ ಅಡಿಗಳಾಗಿರಲಿ; O ಎಂಬುದು P ಯಿಂದ ದಕ್ಷಿಣಕ್ಕಿರುವ ಒಂದು ವೀಕ್ಷಣ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. B ಬಿಂದುವು O ನಿಂದ ಪಶ್ಚಿಮಕ್ಕೆ 160 ಅಡಿ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಮತ್ತೊಂದು ವೀಕ್ಷಣ ಬಿಂದುವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ.



ಚಿತ್ರ 14

ಇಲ್ಲಿ MOP ಮತ್ತು MBP ಕ್ರಮವಾಗಿ 60° ಮತ್ತು 30° ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ ಹಾಗೂ OMP, BMP ಮತ್ತು BOM ಗಳು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಮಕೋನಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

ಈಗ, OMP ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ,

$$\tan MOP = \tan 60^\circ = \frac{PM}{OM} = \frac{x}{OM}$$

$$\therefore\ OM = \frac{x}{\tan 60^\circ} = \frac{x}{\sqrt{3}} \qquad (1)$$

ಮತ್ತು BMP ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ,

$$\tan MBP = \tan 30^\circ = \frac{PM}{BM} = \frac{x}{BM}$$

$$\therefore BM = \frac{x}{\tan 30^\circ} = \frac{x}{1/\sqrt{3}} = x\sqrt{3} \quad (2)$$

ಅಲ್ಲದೆ, BOM ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ,

$BM^2 = OB^2 + OM^2$ ಅಥವಾ $OB^2 = BM^2 - OM^2$

$$\therefore OB^2 = (x\sqrt{3})^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2$$ [(1) ಮತ್ತು (2)ನೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ]

ಅಂದರೆ, $(160)^2 = 3x^2 - \frac{x^2}{3} = \frac{9x^2 - x^2}{3} = \frac{8x^2}{3}$

ಅಂದರೆ, $x^2 = \frac{3 \times (160)^2}{8}$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{3} \times 160}{2\sqrt{2}} = \frac{80\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{80\sqrt{6}}{2} = 40\sqrt{6}$$

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ $x = 40\sqrt{6}$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

$$OM = \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{40\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = 40\sqrt{2}$$

$\therefore$ ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ $= x = 40\sqrt{6} = 98$ ಅಡಿಗಳು (ಸುಮಾರಾಗಿ)
ಗೋಪುರದ ಬುಡದಿಂದ ಮೊದಲನೆಯ ವೀಕ್ಷಣ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಇರುವ ದೂರ

$= 40\sqrt{2} = 56{\cdot}6$ ಅಡಿಗಳು (ಸುಮಾರಾಗಿ).

ಅಭ್ಯಾಸ 3

(1) ಸಮತಲ ಕ್ಷೇತ್ರದ ಮೇಲೆ ಊರ್ಧ್ವಾಧರವಾಗಿ ಒಂದು ಧ್ವಜಸ್ತಂಭ ನಿಂತಿದೆ. ಅದರ ಪಾದದಿಂದ 63 ಅಡಿ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ವೀಕ್ಷಣ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ನೋಡಿದಾಗ ಆ ಧ್ವಜಸ್ತಂಭದ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 60° ಇರುತ್ತದೆ. ಆ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸ್ವಲ್ಪದೂರ ಮುಂದಕ್ಕೆ ಹೋಗಿ ಅಲ್ಲಿಂದ ವೀಕ್ಷಿಸಿದಾಗ ಆ ಧ್ವಜಸ್ತಂಭದ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 30° ಇರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಿದ್ದರೆ ಧ್ವಜಸ್ತಂಭದ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಮೊದಲನೆಯ ವೀಕ್ಷಣ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎರಡನೆಯ ವೀಕ್ಷಣ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಇರುವ ದೂರಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(2) ಮುರಿದುಹೋದ ಒಂದು ಮರದ ಮೇಲ್ಭಾಗವು ನೆಲದೊಡನೆ 30° ಕೋನವನ್ನು ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಆ ಮರದ ಬುಡದಿಂದ ಮುರಿದ ಭಾಗವು ನೆಲಕ್ಕೆ ತಗಲಿರುವ ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ಇರುವ ದೂರ 75 ಅಡಿ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮರದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(3) ಒಬ್ಬ ಮನುಷ್ಯನ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದವು ಅವನ ಎತ್ತರದ $\sqrt{3}$ ರಷ್ಟು ಇದ್ದಾಗ ಸೂರ್ಯನ ಉನ್ನತ ಕೋನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(4) 150 ಅಡಿ ಅಗಲವಿರುವ ಒಂದು ಅಗಲವಾದ ರಸ್ತೆಯ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ಸಮ ಎತ್ತರವುಳ್ಳ ಎರಡು ಮರಗಳಿವೆ. ಇವೆರಡರ ನಡುವೆ ಇರುವ ಯಾವುದೋ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೀಕ್ಷಿಸಿದಾಗ ಆ ಮರಗಳ ಉನ್ನತ ಕೋನಗಳು 60° ಮತ್ತು 30° ಇರುತ್ತವೆ. ಹಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಮರಗಳ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಮರದ ಬುಡದಿಂದ ವೀಕ್ಷಣ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

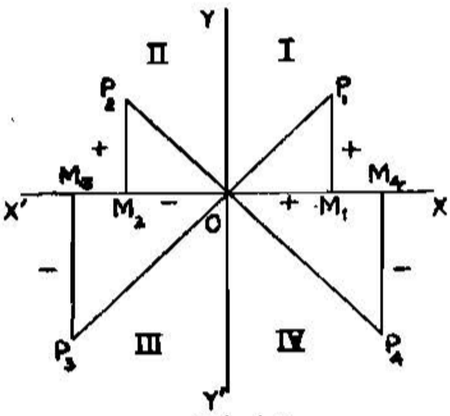
(5) 240 ಅಡಿ ಎತ್ತರವಿರುವ ಒಂದು ಗುಡ್ಡದ ಶಿಖರದಿಂದ ನೋಡಿದ ಒಂದು ಗೋಪುರದ ಶಿಖರ ಮತ್ತು ಪಾದಗಳ ಅವನತಕೋನಗಳು 30° ಮತ್ತು 60° ಇರುತ್ತವೆ. ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಗುಡ್ಡದ ಶಿಖರದಿಂದ ಗೋಪುರದ ಶಿಖರಕ್ಕೆ ಇರುವ ನೇರವಾದ ದೂರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(6) ಒಬ್ಬನು ಒಂದು ಗೋಪುರದ ದಕ್ಷಿಣದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೀಕ್ಷಿಸಿದಾಗ ಆ ಗೋಪುರದ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 45° ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅವನು ಆ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ 36 ಅಡಿ ಪಶ್ಚಿಮಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸಮತಲ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿಯೇ ಹೋಗಿ ಅಲ್ಲಿಂದ ವೀಕ್ಷಿಸಿದಾಗ ಆ ಗೋಪುರದ ಉನ್ನತ ಕೋನವು 30° ಇರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಿದ್ದರೆ ಗೋಪುರದ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ಗೋಪುರದ ಬುಡದಿಂದ ಎರಡನೆಯ ವೀಕ್ಷಣ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ 4

ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳು

4.1 ಕ್ಷೇತ್ರವನ್ನು 90° ಕೋನಗಳನ್ನುಳ್ಳ ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗವನ್ನೂ ಒಂದು ಚತುರ್ಥ ಭಾಗವೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಚತುರ್ಥ ಭಾಗಗಳನ್ನು I, II, III, IV ಎಂದು ನಮೂದಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 15). ಹಾಗೂ ಈ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು X ಮತ್ತು Y ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 15

ಈಗ, ಚಿತ್ರ 15 ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಪರಿಭ್ರಮಿಸುತ್ತಿರುವ ರೇಖೆಯಾದ OX, O ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಪರಿಭ್ರಮಿಸಿ OY ತಲುಪಿದರೆ ಆಗ 90° ಕೋನವೂ, OX' ತಲುಪಿದಾಗ 180° ಕೋನವೂ, OY' ತಲುಪಿದಾಗ 270° ಕೋನವೂ ಮತ್ತು OX ಗೇ ತಲುಪಿದಾಗ 360° ಕೋನವೂ ಉತ್ಪತ್ತಿಯಾಗುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ 0° ಯಿಂದ 90° ವರೆಗಿನ ಕೋನವು ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ I ರಲ್ಲೂ, 90° ಯಿಂದ 180° ವರೆಗಿನ ಕೋನವು ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ II ರಲ್ಲೂ, 180° ಯಿಂದ 270° ವರೆಗಿನ ಕೋನವು ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ III ರಲ್ಲೂ, 270° ಯಿಂದ 360° ವರೆಗಿನ ಕೋನವು ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ IV ರಲ್ಲೂ ಇರುತ್ತದೆ.

ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ I

M_1OP_1 ಕೋನವು 0° ಮತ್ತು 90° ಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಒಂದು ಕೋನವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 15). P_1M_1 ರೇಖೆಯು OX ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಪರಿಭ್ರಮಿಸುತ್ತಿರುವ ರೇಖೆಯು OX ನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ OP_1 ಗೆ ತಲುಪಿದಾಗ M_1OP_1 ಕೋನವು ರಚಿತವಾಯಿತೆಂದು ಭಾವಿಸಬಹುದು.

ಪರಿಭ್ರಮಿಸುವ ರೇಖೆಯು ಯಾವ ಚತುರ್ಥ ಭಾಗದಲ್ಲಿದ್ದರೂ ಅದರ ಚಿಹ್ನೆಯು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿಯೇ ಇರುತ್ತದೆ. OM_1 ಮತ್ತು P_1M_1 ಗಳೂ ಧನಾತ್ಮಕ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಆದುದರಿಂದ M_1OP_1 ಕೋನದ ಎಲ್ಲ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ

ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳೂ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ, ಮೊದಲನೆಯ ಚತುರ್ಥ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಕೋನದ ಎಲ್ಲ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ II

ಪರಿಭ್ರಮಿಸುವ ರೇಖೆಯು OP_2 ಗೆ ತಲುಪಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ಕೋನವು ಎರಡನೆಯ ಚತುರ್ಥ ಭಾಗದಲ್ಲಿದ್ದಂತಾಗುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 15). P_2M_2 ರೇಖೆಯು $X'OX$ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರಲಿ. ಈಗ, P_2M_2 ಧನಾತ್ಮಕ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು OM_1 ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವುದರಿಂದ OM_2 ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಈ ಚತುರ್ಥ ಭಾಗದಲ್ಲಿ sin ಮತ್ತು cosec ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಹೊರತು ಉಳಿದೆಲ್ಲ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಋಣಾತ್ಮಕ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ, ಎರಡನೆಯ ಚತುರ್ಥ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಕೋನದ sin ಮತ್ತು cosec ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಮಾತ್ರ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ III

ಪರಿಭ್ರಮಿಸುವ ರೇಖೆಯು OP_3 ತಲುಪಿದರೆ ಆಗ ಅದು ಮೂರನೆಯ ಚತುರ್ಥ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. P_3M_3 ಯು $X'OX$ ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ, OM_3 ಮತ್ತು M_3P_3 ರೇಖೆಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಕೋನದ tan ಮತ್ತು cot ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದು ಉಳಿದೆಲ್ಲ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ, ಮೂರನೆಯ ಚತುರ್ಥ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಕೋನದ tan ಮತ್ತು cot ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಮಾತ್ರ ಧನಾತ್ಮಕ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.

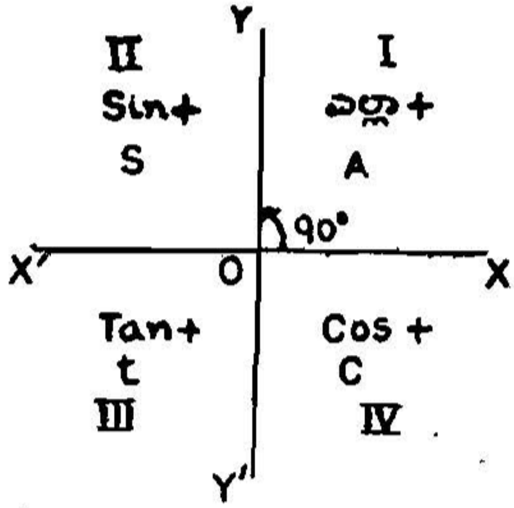
ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ IV

ಪರಿಭ್ರಮಿಸುವ ರೇಖೆಯು OP_4 ನ್ನು ತಲುಪಿದಾಗ ಉಂಟಾದ ಕೋನವು ನಾಲ್ಕನೆಯ ಚತುರ್ಥ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 15). P_4M_4 ರೇಖೆಯು OX ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ, OM_4 ನ ಚಿಹ್ನೆ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿಯೂ, M_4P_4 ನ ಚಿಹ್ನೆಯು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿಯೂ ಇರುತ್ತವೆ. OP_4 ರೇಖೆಯ ಚಿಹ್ನೆಯು ಮೊದಲೇ ತಿಳಿಸಿರುವಂತೆ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ, ಈ ಚತುರ್ಥ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಕೋನದ cos ಮತ್ತು sec ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಹೊರತು ಉಳಿದೆಲ್ಲ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ, ನಾಲ್ಕನೆಯ ಚತುರ್ಥ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಕೋನದ cos ಮತ್ತು sec ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಮಾತ್ರ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ,

ಒಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ, ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ I ರಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳೂ, ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ II ರಲ್ಲಿ sin ಮತ್ತು cosec ಪ್ರಮಾಣಗಳೂ, ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ III ರಲ್ಲಿ tan ಮತ್ತು cot ಪ್ರಮಾಣಗಳೂ, ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ IV ರಲ್ಲಿ cos ಮತ್ತು sec ಪ್ರಮಾಣಗಳೂ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಇವೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಚಿತ್ರರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ತೋರಿಸಬಹುದು (ಚಿತ್ರ 16).

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :



ಚಿತ್ರ 16

(1) 1450°ಯ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ : $1450° = 4 \times 360 + 10°$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ ದತ್ತರೇಖೆಯು 4 ಪರಿಭ್ರಮಣಗಳನ್ನು ಪೂರ್ತಿಮಾಡಿ ಮೊದಲನೆಯ ಚತುರ್ಥಭಾಗದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಈ ಕೋನದ ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳೂ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(2) 1565° ಯ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ : $1565° = 4 \times 360 + 125°$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಈ ಕೋನವು ಎರಡನೆಯ ಚತುರ್ಥ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಇದರ sin ಮತ್ತು cosec ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಮಾತ್ರ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದು ಉಳಿದೆಲ್ಲ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(3) 1325° ಯ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ :

$1325° = 3 \times 360° + 245°$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಈ ಕೋನವು ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ III ರಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ, 1325° ಕೋನದ tan ಮತ್ತು cot ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಮಾತ್ರ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದು ಉಳಿದೆಲ್ಲ ಪ್ರಮಾಣಗಳೂ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

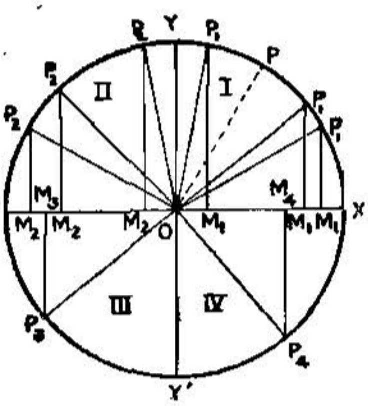
(4) 1724° ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ.

$1724° = 4 \times 360° + 284°$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಈ ಕೋನವು ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ IV ರಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, ಪರಿಭ್ರಮಿಸುವ ರೇಖೆಯು ನಾಲ್ಕು ಪರಿಭ್ರಮಣ

ಗಳನ್ನು ಪೂರ್ತಿಮಾಡಿ ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ IV ರಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ, 1724° ಕೋನದ cos ಮತ್ತು sec ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಮಾತ್ರ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಉಳಿದೆಲ್ಲ ಪ್ರಮಾಣಗಳೂ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

4·2 ಒಂದು ಕೋನವು 0° ಯಿಂದ 360° ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಯಾದಾಗ ಆ ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವಿಕೆ

ಪರಿಭ್ರಮಿಸುತ್ತಿರುವ ರೇಖೆಯಾದ OP ಯ ನಿಶ್ಚಿತ ಬೆಲೆ '*a*' ಆಗಿರಲಿ. OP ರೇಖೆಯು OX ನಲ್ಲಿದ್ದಾಗ OM_1 ನ ಉದ್ದ OP ಯ ಉದ್ದವಾದ '*a*' ಗೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 17) ಹಾಗೂ OP ರೇಖೆಯು OX ನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ OY ಗೆ ತಲಪಿದಾಗ OM_1 ರೇಖೆಯ ಉದ್ದ '*a*' ಯಿಂದ '0' (ಶೂನ್ಯ) ವರೆಗೆ ಕಡಮೆಯಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 17

OP ರೇಖೆಯು OY ನಿಂದ OX′ ಗೆ ಚಲಿಸುತ್ತಾ ಹೋದಂತೆಲ್ಲ OM_2 ರೇಖೆಯ ಉದ್ದ ಬೀಜವಾಕ್ಯ ರೀತ್ಯಾ ಶೂನ್ಯ (0) ದಿಂದ $-a$ ವರೆಗೆ ಕಡಮೆಯಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ, OM_2 ರೇಖೆಯ ಉದ್ದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ OP ಯ ಉದ್ದಕ್ಕೆ ಸಮವಾದರೂ ಅದರ ಚಿಹ್ನೆ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, OM_1 ನ ಉದ್ದ ಧನಾತ್ಮಕವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿ ಮೂರನೆಯ ಚತುರ್ಥ ಭಾಗದಲ್ಲಿ OM_3 ಯ ಉದ್ದವು ಬೀಜವಾಕ್ಯರೀತ್ಯಾ $-a$ ಯಿಂದ 0 ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಯಾಗುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ, ನಾಲ್ಕನೆಯ ಚತುರ್ಥ ಭಾಗದಲ್ಲಿ OM_4 ನ ಉದ್ದ 0 ಯಿಂದ *a* ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸೋಣ :

sin–ಪ್ರಮಾಣ : ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ I ರಲ್ಲಿ ಕೋನವು 0° ಯಿಂದ 90° ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಯಾದಂತೆ sin ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಯು $\frac{M_1P_1}{a}$ ಅಥವಾ, $\frac{0}{a}$ ಯಿಂದ $\frac{a}{a}$, ಅಂದರೆ 0 ಯಿಂದ 1 ಕ್ಕೆ ವೃದ್ಧಿಯಾಗಂತ್ತದೆ.

ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ II ರಲ್ಲಿ ಕೋನವು 90° ಯಿಂದ 180° ಯ ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಯಾದಂತೆ sin ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಯು $\frac{a}{a}$ ನಿಂದ $\frac{0}{a}$, ಅಂದರೆ 1 ರಿಂದ ಶೂನ್ಯದವರೆಗೆ ಕಡಮೆಯಾಗುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತದೆ.

ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ III ರಲ್ಲಿ ಕೋನವು 180° ಯಿಂದ 270° ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಯಾದಂತೆ sin ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಯು $\frac{0}{a}$ ಯಿಂದ $\frac{-a}{a}$, ಅಂದರೆ, 0 ಯಿಂದ -1 ರ ವರೆಗೆ ಮತ್ತೆ ಕಡಮೆಯಾಗುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತದೆ.

ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ IV ರಲ್ಲಿ ಕೋನವು 270° ಯಿಂದ 360° ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಯಾದಂತೆ sin ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಯು $\frac{-a}{a}$ ಯಿಂದ $\frac{0}{a}$ ಅಂದರೆ, -1 ರಿಂದ 0 ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಯಾಗುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತದೆ.

cos–ಪ್ರಮಾಣ : ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ I ರಲ್ಲಿ ಕೋನವು 0° ಯಿಂದ 90° ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಯಾಗುವುದರಿಂದ, cos ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಯು $\frac{OM_1}{a}$ ಅಥವಾ $\frac{a}{a}$ ಯಿಂದ $\frac{0}{a}$ ವರೆಗೆ, ಅಂದರೆ, 1 ರಿಂದ 0 ವರೆಗೆ ಕಡಮೆಯಾಗುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತದೆ,

ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ II ರಲ್ಲಿ ಕೋನವು 90° ಯಿಂದ 180° ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಯಾದಂತೆ cos ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಯು $\frac{0}{a}$ ಯಿಂದ $\frac{-a}{a}$, ಅಂದರೆ, 0 ಯಿಂದ -1 ರ ವರೆಗೆ ಮತ್ತೆ ಕಡಮೆಯಾಗುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತದೆ.

ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ III ರಲ್ಲಿ ಕೋನವು 180° ಯಿಂದ 270° ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಯಾದಂತೆ cos ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಯು $\frac{-a}{a}$ ಯಿಂದ $\frac{0}{a}$, ಅಂದರೆ, -1 ರಿಂದ 0 ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಯಾಗುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತದೆ.

ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ IV ರಲ್ಲಿ ಅದರ ಬೆಲೆಯು $\frac{0}{a}$ ಯಿಂದ $\frac{a}{a}$, ಅಂದರೆ, 0 ಯಿಂದ 1 ರ ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

tan–ಪ್ರಮಾಣ : ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ I ರಲ್ಲಿ ಕೋನವು 0° ಯಿಂದ 90° ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಯಾದಂತೆ, M_1P_1 ರೇಖೆಯು 0 ಯಿಂದ a ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಯಾಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು OM_1 ರೇಖೆಯು a ಯಿಂದ 0 ವರೆಗೆ ಕಡಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ tan ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಯಾದ $\frac{M_1P_1}{OM_1}$ ಶೂನ್ಯದಿಂದ ಅನಂತದವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ II ರಲ್ಲಿ ಪರಿಭ್ರಮಿಸುವ ರೇಖೆಯು 90° ಗಿಂತ ಸ್ವಲ್ಪ ಹೆಚ್ಚಿ ಯಾದ XOP_2 ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿದಾಗ, M_2P_2 ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ 'a' ಗೆ ಸಮವಾಗಿರು ತ್ತದೆ ಮತ್ತು OM_2 ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು ಋಣ ಚಿಹ್ನೆಯುಳ್ಳದ್ದಾಗಿರು ತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ, tan ಪ್ರಮಾಣವು ಋಣ ಚಿಹ್ನೆಯುಳ್ಳ ಅನಂತ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲದೆ ಪರಿಭ್ರಮಿಸುವ ರೇಖೆಯು OY ನಿಂದ OX′ ಕಡೆಗೆ ಚಲಿಸಿ ದಾಗ, M_2P_2 'a' ಯಿಂದ 0 ವರೆಗೆ ಕಡಮೆಯಾಗುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತದಲ್ಲದೆ OM_2 ಸಹ ಋಣ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಕೂಡಿದ್ದು 0 ಯಿಂದ $-a$ ವರೆಗೆ ಕಡಮೆಯಾಗುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಎರಡನೆಯ ಚತುರ್ಥ ಭಾಗದಲ್ಲಿ tan ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಯು $-\infty$ ಯಿಂದ 0 ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ III ರಲ್ಲಿ OM_3 ಮತ್ತು M_3P_3 ಎರಡೂ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರು ತ್ತವೆ. ಆದುದರಿಂದ, tan ಪ್ರಮಾಣವು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಪರಿಭ್ರಮಿ ಸುವ ರೇಖೆಯು OY′ ನಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾದಾಗ tan ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಯು ಅನಂತವಾಗಿರು ತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಮೂರನೆಯ ಚತುರ್ಥ ಭಾಗದಲ್ಲಿ tan ಪ್ರಮಾಣವು 0 ಯಿಂದ ∞ ದ ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ IV ರಲ್ಲಿ OM_4 ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿಯೂ, M_4P_4 ಋಣಾತ್ಮಕ ವಾಗಿಯೂ ಇರುತ್ತವೆ. ಆದುದರಿಂದ tan ಪ್ರಮಾಣವು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಪರಿಭ್ರಮಿಸುವ ರೇಖೆಯು OY′ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋದಾಗ tan ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಯು $+\infty$ ದಿಂದ $-\infty$ ಕ್ಕೆ ಬದಲಾಯಿಸುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ, ನಾಲ್ಕನೆಯ ಚತುರ್ಥ ಭಾಗದಲ್ಲಿ tan ಪ್ರಮಾಣವು $-\infty$ ದಿಂದ 0 ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಯಾಗುತ್ತದೆ (ಇಲ್ಲಿ ಪರಿಭ್ರಮಿಸುವ ರೇಖೆ OX ನೊಡನೆ ಐಕ್ಯವಾದಾಗ tan ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆ ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ).

cot–ಪ್ರಮಾಣ : cot ಪ್ರಮಾಣವು tan ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕೆ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಿಯಾಗಿರು ತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಮೊದಲನೆಯ ಚತುರ್ಥ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅದರ ಬೆಲೆಯು ∞ ದಿಂದ 0 ವರೆಗೆ ಕಡಮೆಯಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ.

ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ II ರಲ್ಲಿ cot ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಯು 0 ಯಿಂದ $-\frac{a}{0}$ ಅಥವಾ 0 ಯಿಂದ $-\infty$ ದ ವರೆಗೆ ಮತ್ತೆ ಕಡಮೆಯಾಗುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತದೆ.

ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ III ರಲ್ಲಿ cot ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಯು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದು ∞ ದಿಂದ 0 ವರೆಗೆ ಕಡಮೆಯಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಪರಿಭ್ರಮಿಸುವ ರೇಖೆಯು OX′ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋದಾಗ cot ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಯು $-\infty$ ದಿಂದ $+\infty$ ಕ್ಕೆ ಬದಲಾಯಿಸುತ್ತದೆ.

ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ IV ರಲ್ಲಿ cot ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಯು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದು 0 ಯಿಂದ $-\infty$ ದ ವರೆಗೆ ಕಡಮೆಯಾಗುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತದೆ.

sec–ಪ್ರಮಾಣ : sec ಪ್ರಮಾಣವು cos ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕೆ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ, ಅದು ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ I ರಲ್ಲಿ 1 ರಿಂದ ∞ ದ ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಯಾಗುತ್ತದೆ. ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ II ರಲ್ಲಿ sec ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆ $-\infty$ ದಿಂದ -1 ರ ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಯಾಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, ಪರಿಭ್ರಮಿಸುವ ರೇಖೆಯು OY ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋದಾಗ OM_1 ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು sec ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಯು $+\infty$ ದಿಂದ $-\infty$ ಕ್ಕೆ ಬದಲಾಯಿಸುತ್ತದೆ.

ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ III ರಲ್ಲಿ sec ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಯು -1 ರಿಂದ $-\infty$ ದ ವರೆಗೆ ಕಡಮೆಯಾಗುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತದೆ.

ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ IV ರಲ್ಲಿ sec ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಯು ∞ ದಿಂದ 1 ರ ವರೆಗೆ ಕಡಮೆಯಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಪರಿಭ್ರಮಿಸುವ ರೇಖೆಯು OY, ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋದಾಗ sec ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಯು $-\infty$ ದಿಂದ $+\infty$ ಕ್ಕೆ ಬದಲಾಯಿಸುತ್ತದೆ.

cosec–ಪ್ರಮಾಣ : cosec ಪ್ರಮಾಣವು sin ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕೆ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ, ಅದರ ಬೆಲೆಯು ಮೊದಲನೆಯ ಚತುರ್ಥ ಭಾಗದಲ್ಲಿ $+\infty$ ದಿಂದ 1 ರ ವರೆಗೆ ಕಡಮೆಯಾಗುತ್ತ ಹೋಗಿ, ಎರಡನೆಯ ಚತುರ್ಥ ಭಾಗದಲ್ಲಿ $+1$ ರಿಂದ $+\infty$ ದ ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಯಾಗಿ, ಮೂರನೆಯ ಚತುರ್ಥ ಭಾಗದಲ್ಲಿ $-\infty$ ದಿಂದ -1 ರ ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಯಾಗುತ್ತ ಹೋಗಿ, ನಾಲ್ಕನೆಯ ಚತುರ್ಥ ಭಾಗದಲ್ಲಿ -1 ರಿಂದ $-\infty$ ದ ವರೆಗೆ ಕಡಮೆಯಾಗುತ್ತ ಹೋಗುತ್ತದೆ, ಈ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು sec ಪ್ರಮಾಣದ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೇ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.

ಅಧ್ಯಾಯ 5

ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಫಲನಗಳ ರೇಖಾಚಿತ್ರಗಳು

5.1 ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಫಲನಗಳ ಆವರ್ತಕಾಲ

ಕೋನವು $0°$ ಯಿಂದ $360°$ ಅಥವಾ 2π ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಯಾದಾಗ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಹೇಗೆ ಬದಲಾಯಿಸುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಹಿಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಕೋನವು 0 ಯಿಂದ 2π ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಯಾದಾಗ sin ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಯು ಮೊದಲು 0 ಯಿಂದ 1 ರ ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಯಾಗಿ, ಅನಂತರ 1 ರಿಂದ -1 ರವರೆಗೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿ, ಕೊನೆಗೆ -1 ರಿಂದ 0 ವರೆಗೆ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ಕೋನವು 2π ನಿಂದ 4π ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಯಾದಂತೆ sin ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಯು ಮೊದಲಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೇ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿ ತನ್ನ ಮೂಲಬೆಲೆಯಾದ ಶೂನ್ಯವನ್ನು ಸೇರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು 4 ಸಮಕೋನ ಅಥವಾ 2π ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸದಿಂದಿರುವ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಕೋನಗಳ sin ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಈ ರೀತಿ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅಂತರವುಳ್ಳ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಅಥವಾ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಕಾಲಾವಕಾಶದ ನಂತರ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿದರೆ, ಆ ಕಾಲಾವಕಾಶವನ್ನು **ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಆವರ್ತಕಾಲ** (period) ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

sin ಪ್ರಮಾಣದ ಆವರ್ತಕಾಲ 2π ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳು.

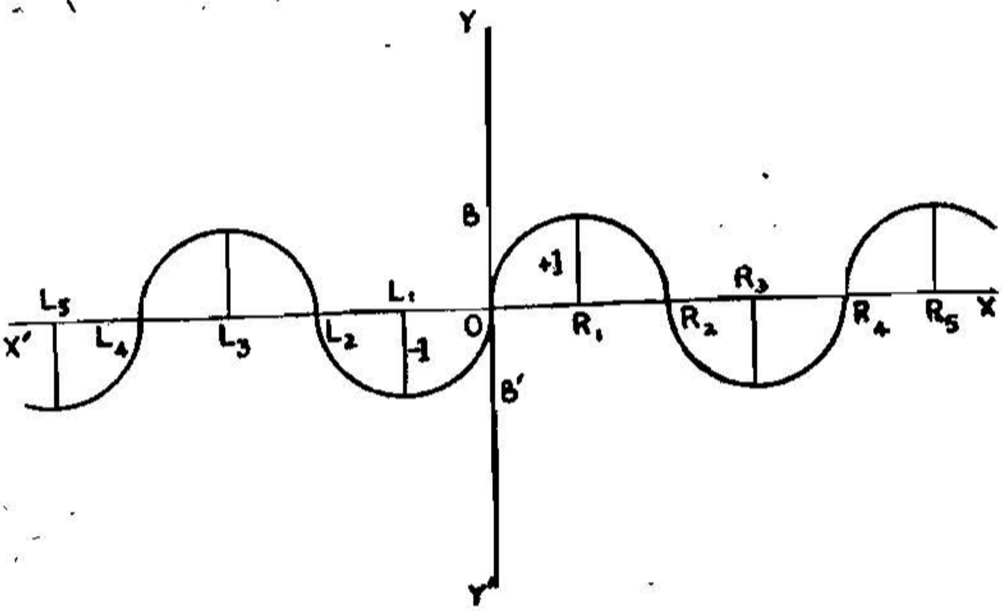
cos ಪ್ರಮಾಣದ ಆವರ್ತಕಾಲ 2π ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳು.

sec, cosec ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಆವರ್ತಕಾಲಗಳೂ 2π ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳು ಹಾಗೂ tan ಮತ್ತು cot ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಆವರ್ತಕಾಲ π ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳು.

ಕೋನವು ವೃದ್ಧಿಯಾದಂತೆ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಫಲನಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿ ಕೆಲವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅಥವಾ ನಿಯಮಿತ ಕಾಲಗಳ ಅನಂತರ ಪುನರಾವರ್ತಿಸುವುದರಿಂದ ಆ ಫಲನಗಳನ್ನು **ಆವರ್ತೀಯ ಫಲನ** (ನಿಯತಕಾಲಿಕ ಉತ್ಪನ್ನ ಫಲ) ಗಳೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಉಂಟಾಗುವ ಪರಿಣಮನಗಳನ್ನು (variations) ರೇಖಾಚಿತ್ರಗಳ ಮೂಲಕ ಯಾವರೀತಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು ಅಥವಾ ತೋರಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯೋಣ.

6.2 sin—ಪ್ರಮಾಣದ ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ಚಿತ್ರ 18

X–ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ O–ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿ L_1, L_2, L_3, L_4, ಇತ್ಯಾದಿ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ R_1, R_2, R_3, R_4, ಇತ್ಯಾದಿ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ $OL_1 = L_1L_2 = L_2L_3 =$ ಇತ್ಯಾದಿ ಮತ್ತು $OR_1 = R_1R_2 = R_2R_3 =$ ಇತ್ಯಾದಿ ಇರುವಂತೆ ಗುರುತಿಸಿರಿ (ಚಿತ್ರ 18). ಇಲ್ಲಿ $OL_2 = -\pi$ ಹಾಗೂ $OR_2 = \pi$ ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳಾಗಿರಲಿ; ಅಲ್ಲದೆ $OB = 1$ ಮತ್ತು $OB' = -1$ ಎಂಬುದಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ.

ಈಗ, $y = \sin x$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ y ಪದವು $(\sin x)$ x ಪದದ ಕೆಲವು ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

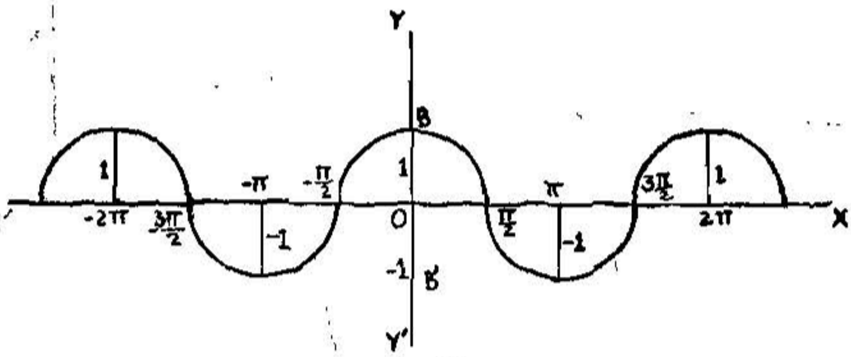
ಅವೆರಡರ ಬೆಲೆಗಳನ್ನೂ ಕೆಳಕಂಡ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಸೂಚಿಸಬಹುದು:

x	-2π	$\frac{-3\pi}{2}$	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
y $(\sin x)$	0	1	0	−1	0	1	0	−1	0	1	0	−1	0

X-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ $(-2\pi, 0)$, $(0, 2\pi)$, $(2\pi, 4\pi)$, ಅವಕಾಶ (Interval) ಗಳಲ್ಲಿ ಬರುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಮೇಲಿನ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಗುರುತಿಸಿ, ಅವಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾದ y ಬೆಲೆಗಳನ್ನು Y-ಅಕ್ಷದ (ಅಥವಾ Y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾದ ರೇಖೆಗಳ) ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸಿ ಅವುಗಳ ಮೂಲಕ ಒಂದು

ನಯವಾದ ವಕ್ರರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಚಿತ್ರ 18 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ sin ಪ್ರಮಾಣದ ರೇಖಾಚಿತ್ರ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ಆ ಚಿತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ ಪ್ರತಿ 2π ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳ ನಂತರ sin ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಗಳು ಪುನರಾವರ್ತಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.

5.3 cos–ಪ್ರಮಾಣದ ರೇಖಾಚಿತ್ರ



ಚಿತ್ರ 19

X-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ x ನ ಬೆಲೆಗಳಾದ $-2\pi, -\frac{3\pi}{2}, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ ಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. y ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ $OB = 1$ ಮತ್ತು $OB' = -1$ ಆಗಿರುವಂತೆ B ಮತ್ತು B' ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿರಿ. ಈಗ, $y = \cos x$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು x ನ ವಿವಿಧ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಅನುರೂಪವಾದ y ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿರುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ, ಹಾಗೂ ಆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು Y-ಅಕ್ಷದ ಅಥವಾ Y-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾದ ರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸಿರಿ.

x	-2π	$\frac{-3\pi}{2}$	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y $(\cos x)$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1

ಅನಂತರ ಬಂದ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳನ್ನೂ ಒಂದು ನಯವಾದ ವಕ್ರರೇಖೆಯಿಂದ ಸೇರಿಸಿದರೆ ಆಗ $(-2\pi, 2\pi)$ ಅವಕಾಶದಲ್ಲಿ $y = \cos x$ ಫಲನದ ರೇಖಾಚಿತ್ರ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 19).

$\sin x$ ಮತ್ತು $\cos x$ ಫಲನಗಳ ರೇಖಾಚಿತ್ರದಿಂದ ಕೆಳಕಂಡ ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು :

(1) $\sin x$ ಮತ್ತು $\cos x$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು -1 ಮತ್ತು 1 ರ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತವೆ.

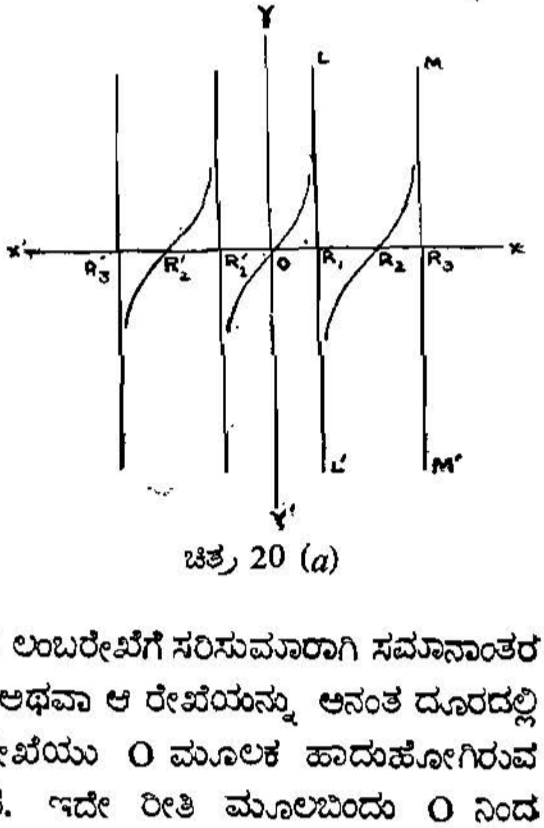
(2) $\sin x$ ಮತ್ತು $\cos x$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಪ್ರತಿ 2π ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳ ನಂತರ ಪುನರಾವರ್ತಿಸುತ್ತವೆ.

(3) $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ ಆದಾಗ $\sin x$ ನ ಬೆಲೆಯು ಕ್ರಮವಾಗಿ $0, 1, 0, -1, 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದರೆ, $\cos x$ ನ ಬೆಲೆಯು ಕ್ರಮವಾಗಿ $1, 0, -1, 0, 1$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

5.4 tan–ಪ್ರಮಾಣದ ರೇಖಾಚಿತ್ರ

ಕೋನವು $0°$ ಯಿಂದ $90°$ ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಯಾದಂತೆ tan ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಯು ಶೂನ್ಯದಿಂದ ಅನಂತದವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಯಾಗುತ್ತದೆ. ಚಿತ್ರ 20 (a) ಯಲ್ಲಿ OR_1 ಒಂದು ಸಮಕೋನವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ R_1 ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ಲಂಬವಾದ RL ನ ಉದ್ದ ಅನಂತವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುದ ವಕ್ರರೇಖೆಯು R_1L ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಅನಂತ ದೂರದಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. ಕೋನವು $90°$ ಗಿಂತ ಸ್ವಲ್ಪವೇ ಸ್ವಲ್ಪ ಜಾಸ್ತಿಯಾದಾಗ ಅದರ tan ಪ್ರಮಾಣವು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಅನಂತ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿಯೂ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ, ಕೋನವು LR_1L' ನ ಬಳಿಕ ವೃದ್ಧಿಯಾದಂತೆ tan ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ರೇಖೆಯು X-ಅಕ್ಷದ ತಳಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅನಂತ ದೂರದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ (ಅಂದರೆ, ಲಂಬರೇಖೆಯಾದ R_1L' ಗೆ ಸರಿಸುಮಾರು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ವೃದ್ಧಿಯಾಗಿ) ಅನಂತರ R_2 ಮೂಲಕ ಹಾದು X-ಅಕ್ಷದ



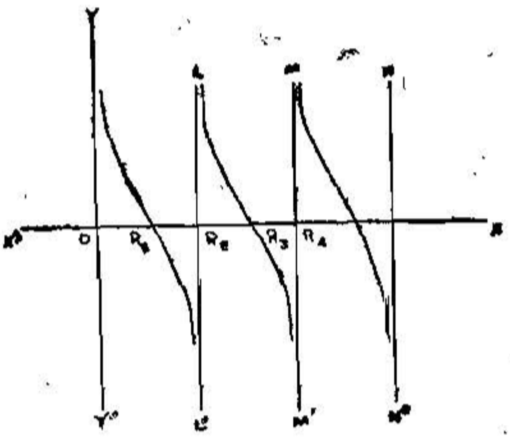
ಚಿತ್ರ 20 (a)

ಮೇಲ್ಭಾಗಕ್ಕೆ ಹೋಗಿ, ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ R_3M ಲಂಬರೇಖೆಗೆ ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ವೃದ್ಧಿಯಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ಆ ರೇಖೆಯನ್ನು ಅನಂತ ದೂರದಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ರೀತಿ ಬಂದ ವಕ್ರರೇಖೆಯು O ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗಿರುವ ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ಮೂಲಬಿಂದು O ನಿಂದ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿಯೂ ಸಮಾನಾಂತರವಾದ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳು ಉತ್ಪತ್ತಿಯಾಗುತ್ತವೆ.

ಆದುದರಿಂದ tan ಪ್ರಮಾಣದ ರೇಖಾಚಿತ್ರವು ಸಮರೂಪವಾದ, ಒಂದುಗೂಡದ (disconnected), ಅನಂತ ಸಮಾನಾಂತರ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

5.5 cot–ಪ್ರಮಾಣದ ರೇಖಾಚಿತ್ರ

tan ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಎಳೆದ ರೇಖೆಯ ತರಹದಲ್ಲಿಯೇ cot–ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ [ಚಿತ್ರ 20 (*a*) ಯಲ್ಲಿರುವಂತೆಯೇ]. ಆಗ ಅದು OY ಯನ್ನು O ಯಿಂದ ಮೇಲೆ ಅನಂತ ದೂರದಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ ; ಬಳಿಕ ಅದು R_1 ಮೂಲಕ ಹಾದು R_2 ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ಲಂಬ ರೇಖೆಯನ್ನು OX ನ (X–ಅಕ್ಷದ) ತಳಭಾಗದಲ್ಲಿ (ಋಣಭಾಗ) ಅನಂತ ದೂರದಲ್ಲಿ



ಚಿತ್ರ 20 (*b*)

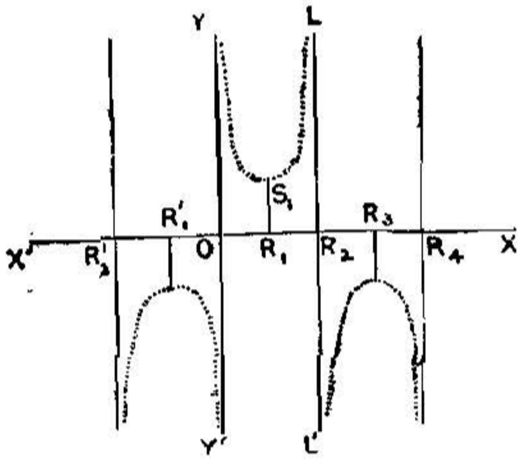
ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. R_2 ಬಿಂದುವಿನ ನಂತರ ಅದು R_2 ಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅನಂತ ದೂರದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗಿ ಮೊದಲಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೇ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, cot ಪ್ರಮಾಣದ ರೇಖಾಚಿತ್ರವೂ ಕೂಡ tan ಪ್ರಮಾಣದ ರೇಖಾಚಿತ್ರದಂತೆಯೇ ಸಮರೂಪವಾದ, ಒಂದುಗೂಡದ, ಅನಂತ ಸಮಾನಾಂತರ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ [ಚಿತ್ರ 20 (*b*)].

5.6 cosec–ಪ್ರಮಾಣದ ರೇಖಾಚಿತ್ರ

ಕೋನವು 0° ಆಗಿದ್ದಾಗ cosec ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಯು ಅನಂತವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಚಿತ್ರ 21 ರಲ್ಲಿರುವ ವಕ್ರರೇಖೆಯು Y-ಅಕ್ಷವನ್ನು X-ಅಕ್ಷದ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅನಂತ ದೂರದಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. ಕೋನವು 90° ಆದಾಗ ಅಂದರೆ, OR_1 90° ಸೂಚಿಸಿದಾಗ cosec ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಯು 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ R_1S_1 ರೇಖೆಯ ಉದ್ದ 1. ಕೋನವು 180° ಆದಾಗ, cosec ಪ್ರಮಾಣದ

ಬೆಲೆಯೂ ಅನಂತವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ, ಇದನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಭಾಗವು R_2 ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ಲಂಬರೇಖೆ (LR_2L') ಯನ್ನು ಅನಂತ ದೂರದಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. ಕೋನವು $180°$ ಗಿಂತ ಸ್ವಲ್ಪ ಜಾಸ್ತಿಯಾದಾಗ, cosec ಪ್ರಮಾಣದ ಬೆಲೆಯೂ $+\infty$ ದಿಂದ $-\infty$ ಕ್ಕೆ ಬದಲಾಯಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಇದನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಭಾಗವು R_2 ಬಿಂದುವಿನ ಬಳಿಕ LR_2L' ರೇಖೆಯನ್ನು X-ಅಕ್ಷದ ತಳಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅನಂತ ದೂರದಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ಕೋನವು ವೃದ್ಧಿಯಾದಂತೆ ಆ ವಕ್ರರೇಖೆಯು ಮೊದಲಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೇ ಮುಂದುವರಿದು R_4 ಮೂಲಕ ಎಳೆದಿರುವ ಲಂಬ ರೇಖೆಯನ್ನು ಮತ್ತೆ X-ಅಕ್ಷದ ತಳಭಾಗದಲ್ಲಿಯೆ ಅನಂತದೂರದಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 21

ಇದೇ ರೀತಿ, ಕೋನವು Y-ಅಕ್ಷದ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿ ವೃದ್ಧಿಯಾದಾಗಲೂ ತಕ್ಕ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

5.7 sec–ಪ್ರಮಾಣದ ರೇಖಾಚಿತ್ರ

Y-ಅಕ್ಷವನ್ನು R_1S_1 ಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 21) cosec ಪ್ರಮಾಣದ ರೇಖಾಚಿತ್ರವನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಅದು sec ಪ್ರಮಾಣದ ರೇಖಾಚಿತ್ರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 5

ಈ ಕೆಳಗಿನ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಫಲನಗಳ ರೇಖಾಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ :

(1) $y \quad 2\cos x$ (2) $y = 2\sin 2x$ (3) $y = \sin x - \cos x$

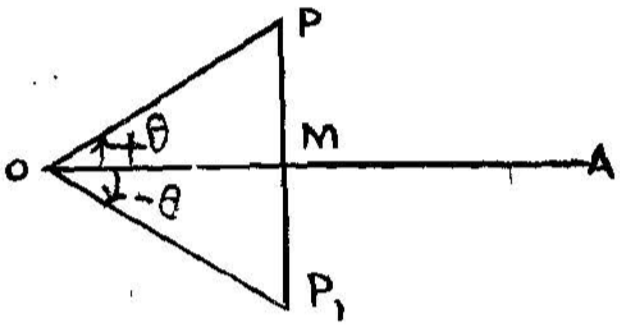
(4) $y = \cos 2x$ (5) $y = \tan x + \cot x$ (6) $y = \cos x + \sin x$

(7) $y = \cot x - \tan x$ (8) $y = \sin 2x + \cos 2x$.

ಅಧ್ಯಾಯ 6

ಸಂಬಂಧಿತ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು
(Trigonometric Ratios of Allied Angles)

6.1 θ ಕೋನದ ಎಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ $-\theta$ ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋಣಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕ್ರಮ :



ಚಿತ್ರ 22

ಪರಿಭ್ರಮಿಸುವ ರೇಖೆಯು OA ಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭವಾಗಿ OP ವರೆಗೆ ಚಲಿಸಿ θ ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲಿ (ಚಿತ್ರ 22). PM ರೇಖೆಯು OA ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರಲಿ. $PM = MP_1$ ಆಗಿರುವಂತೆ PM ರೇಖೆಯನ್ನು P_1 ವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ MP ಮತ್ತು MP_1 ಪರಸ್ಪರ ವಿರುದ್ಧ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ, MP ಯು ಚಿಹ್ನೆ (+) ಆದರೆ MP_1 ರೇಖೆಯು ಚಿಹ್ನೆ (−) ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ತ್ರಿಭುಜ $OPM \equiv$ ತ್ರಿಭುಜ OP_1M ; ಏಕೆಂದರೆ, $MP = MP_1$, $OM = OM$ ಮತ್ತು $\angle OMP = 90° = \angle OMP_1$. ಆದುದರಿಂದ, $\angle POM = \angle MOP_1$ ಮತ್ತು $OP = OP_1$. ಅಲ್ಲದೆ POM ಮತ್ತು MOP_1 ಕೋನಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ, $\angle MOP = \theta$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $\angle MOP_1 = -\theta$ ಹಾಗೂ ಪರಿಭ್ರಮಿಸುತ್ತಿರುವ ರೇಖೆಗಳಾದ OP ಮತ್ತು OP_1 ಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಮೊದಲೇ ತಿಳಿಸಲಾಗಿದೆ,

ಈಗ OMP_1 ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ,

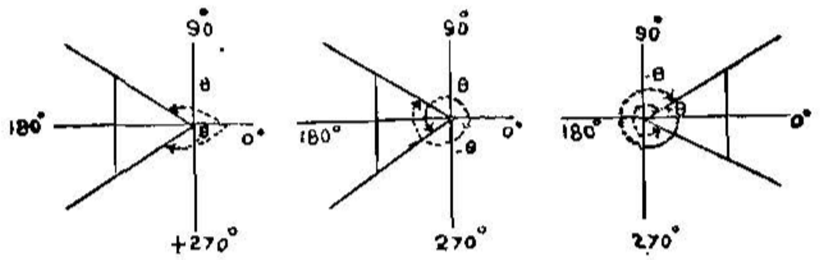
$$\sin(-\theta) = \frac{MP_1}{OP_1} = \frac{-MP}{OP} = -\sin\theta \quad (\because -MP_1 = +MP, \; OP_1 = OP)$$

$$\cos(-\theta) = \frac{OM}{OP_1} = \frac{OM}{OP} = \cos\theta \quad (\because\ OP_1 = OP)$$

$$\tan(-\theta) = \frac{MP_1}{OM} = \frac{-MP}{OM} = -\tan\theta \ (\because -MP_1 = +MP)$$

ಇದೇ ರೀತಿ, $\cot(-\theta) = -\cot\theta, \sec(-\theta) = \sec\theta, \operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.

θ ಕೋನವು $0°$ ಯಿಂದ $90°$ ಯೊಳಗಿನ ಯಾವ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೂ ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದ ಸಂಬಂಧಗಳು ಸತ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿದೆ. ಈ ಸಂಬಂಧಗಳು θ ಕೋನದ ಮತ್ಯಾವ ಬೆಲೆಗಾದರೂ ಸತ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ಚಿತ್ರಗಳ ಮೂಲಕ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 23 (i) 23 (ii) 23 (iii)

ಚಿತ್ರ 23 (i) ರಲ್ಲಿ θ ಕೋನವು $90°$ ಗೂ $180°$ ಗೂ ನಡುವೆ ಇರುವ ಕೋನವನ್ನು, $-\theta$ ಕೋನವು ಋಣ ಚಿಹ್ನೆಯುಳ್ಳ ಅದೇ ಕೋನವನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಅದೇ ರೀತಿ 23 (ii) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ವಿರುದ್ಧ ಚಿಹ್ನೆಗಳನುಳ್ಳ ಹಾಗೂ $180°$ ಗೂ $270°$ ಗೂ ನಡುವೆ ಇರುವ ಕೋನಗಳನ್ನು θ ಮತ್ತು $-\theta$ ಗಳು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಹಾಗೂ 23 (iii) ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ವಿರುದ್ಧ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನುಳ್ಳ ಮತ್ತು $270°$ ಗೂ $360°$ ಗೂ ನಡುವೆ ಇರುವ ಕೋನವನ್ನು θ ಮತ್ತು $-\theta$ ಗಳು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

ಆದುದರಿಂದ ಈ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಮೊದಲೇ ಸೂಚಿಸಿರುವ ವಾದಸರಣಿಯನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) $\sin(-60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos(-60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$

(3) $\tan(-60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$

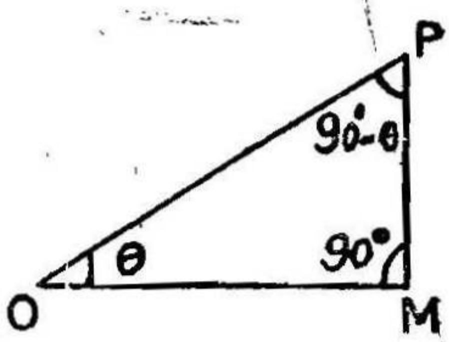
(4) $\sin(-120^\circ) = -\sin 120^\circ$

(5) $\cos(-240^\circ) = +\cos 240^\circ$

(6) $\tan(-300^\circ) = -\tan 300^\circ$

6.2 θ ಮತ್ತು $(90^\circ-\theta)$ ಕೋನಗಳ ಅಥವಾ ಪೂರಕ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನ ಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು

ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವು ಒಂದು ಸಮಕೋನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಒಂದು ಕೋನವು ಮತ್ತೊಂದು ಕೋನಕ್ಕೆ ಪೂರಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಒಂದು ಕೋನವು θ ಆಗಿದ್ದರೆ ಅದರ ಪೂರಕ ಕೋನವು $90^\circ-\theta$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 24

ಈಗ, OMP ಸಮಕೋನತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರ 24) MOP ಕೋನವು 'θ' ಎಂದಾದರೆ MPO ಕೋನವು $90^\circ - \theta$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ MOP ಮತ್ತು MPO ಪೂರಕ ಕೋನಗಳು. ಅವುಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳಲ್ಲಿರುವ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

OMP ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ,

$$\sin(90^\circ - \theta) = \sin MPO = \frac{OM}{OP} = \cos MOP = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \cos MPO = \frac{PM}{OP} = \sin MOP = \sin\theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \tan MPO = \frac{OM}{PM} = \cot MOP = \cot\theta$$

$$\cot(90^\circ - \theta) = \cot MPO = \frac{PM}{OM} = \tan MOP = \tan\theta$$

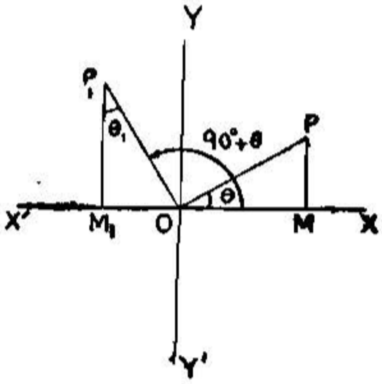
$$\sec(90^\circ - \theta) = \sec MPO = \frac{OP}{PM} = \operatorname{cosec} MOP = \operatorname{cosec}\theta$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \operatorname{cosec} MPO = \frac{OP}{OM} = \sec MOP = \sec\theta$$

ಅಂದರೆ, ಒಂದು ಕೋನದ, sin ಪ್ರಮಾಣ = ಅದರ ಪೂರಕ ಕೋನದ cos ಪ್ರಮಾಣ
tan ಪ್ರಮಾಣ = ಅದರ ಪೂರಕ ಕೋನದ cot ಪ್ರಮಾಣ
sec ಪ್ರಮಾಣ = ಅದರ ಪೂರಕ ಕೋನದ cosec ಪ್ರಮಾಣ

6.3 θ ಮತ್ತು $(90°+\theta)$ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು

O ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಪರಿಭ್ರಮಿಸುತ್ತಿರುವ ರೇಖೆಯು, OX ನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ OP ವರೆಗೆ ಚಲಿಸಿ $\lfloor XOP$ ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಲಿ (ಚಿತ್ರ 25) ಹಾಗೂ $\lfloor XOP = \theta$ ಆಗಿರಲಿ. OP_1 ರೇಖೆಯು OP ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ, $\lfloor XOP_1 = 90° + \theta$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಈಗ $P_1O = OP$ ಆಗಿರಲಿ. ಮತ್ತು PM ರೇಖೆಯು X'OX ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು P_1M_1 ಕೂಡ X'OX ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿಲಿ.



ಚಿತ್ರ 25

ಈಗ. $\lfloor P_1OM_1 = 180° - (90° + \theta)$
$= 90° - \theta$

ಹಾಗೂ $\lfloor OP_1M_1 = 90° - (90° - \theta)$
$= \theta$

ಆದುದರಿಂದ, POM ಮತ್ತು OP_1M_1 ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

$$\therefore \frac{OP}{OP_1} = \frac{PM}{OM_1} = \frac{OM}{P_1M_1}$$

ಆದರೆ, ಪರಿಭ್ರಮಿಸುತ್ತಿರುವ ರೇಖೆಯಾದ OP, OP_1 ಗೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ $PM = OM_1$, $OM = P_1M_1$. ತಕ್ಕ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ನಮೂದಿಸಿದಾಗ, $PM = -OM_1$, $OM = P_1M_1$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

ಈಗ,

$$\sin(90° + \theta) = \frac{P_1M_1}{OP_1} = \frac{OM}{OP} = \cos\theta$$

$$\cos(90° + \theta) = \frac{OM_1}{OP_1} = \frac{-PM}{OP} = -\sin\theta$$

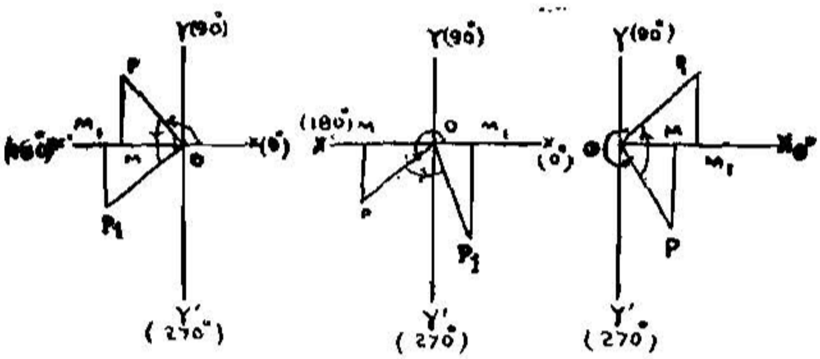
$$\tan(90^\circ + \theta) = \frac{P_1M_1}{OM_1} = \frac{OM}{-PM} = -\cot\theta$$

ಆದುದರಿಂದ,

$\sin(90^\circ + \theta) = \cos\theta$, $\cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta$,
$\tan(90^\circ + \theta) = -\cot\theta$ ಹಾಗೂ,

$\cot(90^\circ + \theta) = -\tan\theta$, $\sec(90^\circ + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$, $\operatorname{cosec}(90^\circ + \theta) = \sec\theta$

ಈ ಸಂಬಂಧಗಳು θ ಕೋನದ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಾದರೂ ಸತ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ಕೆಳಕಂಡ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ :



(i) (ii) (iii)

ಚಿತ್ರ 26

ಮೊದಲೇ ತಿಳಿಸಿರುವ ವಾದ ಸರಣಿಗಳೆಲ್ಲವೂ ಚಿತ್ರ 26 (i), (ii), (iii) ಕ್ಕೆ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತವೆ. ಏಕೆಂದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿಯೂ, OM ಮತ್ತು M_1P_1 ಒಂದೇ ಚಿಹ್ನೆಯುಳ್ಳವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಹಾಗೂ MP ಮತ್ತು OM_1 ಪರಸ್ಪರ ವಿರುದ್ಧ ಚಿಹ್ನೆಯುಳ್ಳವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ, $M_1P_1 = +OM$ ಮತ್ತು $OM_1 = -MP$.

ಅಲ್ಲದೆ, $\angle POP_1 = 90^\circ$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, θ ಕೋನವು ಯಾವ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದರೂ XOP_1 ಕೋನವು $90^\circ + \theta$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ θ ಕೋನದ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಾದರೂ $(90^\circ + \theta)$ ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಮೊದಲೇ ತಿಳಿಸಿರುವ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) $\sin(90^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

(2) $\cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

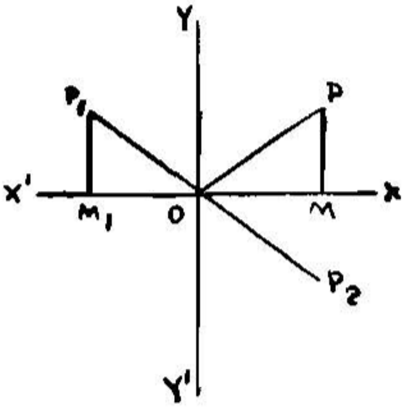
(3) $\tan(90^\circ + 45^\circ) = -\cot 45^\circ = -1$

(4) $\sec(90^\circ + 60^\circ) = -\operatorname{cosec} 60^\circ = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

(5) $\operatorname{cosec}(90^\circ + 30^\circ) = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$

(6) $\cot(90^\circ + 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$

6.4 θ ಮತ್ತು $(180^\circ - \theta)$ ಅಥವಾ $(\pi - \theta)$ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು



ಚಿತ್ರ 27

ಪರಿಭ್ರಮಿಸುತ್ತಿರುವ ರೇಖೆಯು, OX ನಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ OX′ ವರೆಗೆ ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣವಾಗಿ ಚಲಿಸಲಿ. ಆಗ π ಕೋನವು ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ಅನಂತರ ಅದು ಪ್ರದಕ್ಷಿಣವಾಗಿ ಚಲಿಸಿ $\angle X'OP_1 = -\angle MOP = -\theta$ ಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡಿ OP_1 ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 27). ಆಗ ಉಂಟಾದ XOP_1 ಕೋನವು $\pi - \theta$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. P_1M_1 ರೇಖೆಯು X′OX ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರಲಿ. ಈಗ $OP = OP_1$ ಆಗಿರುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು. P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ PM ರೇಖೆಯನ್ನು X′OX ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವಂತೆ ಎಳೆಯಿರಿ.

ಈಗ, POM ಮತ್ತು P_1OM_1 ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ. $\angle OMP = 90^\circ = \angle OM_1P_1$, $\angle MOP = \theta = \angle M_1OP_1$. ಆದುದರಿಂದ ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

$$\therefore \frac{OP}{OP_1} = \frac{PM}{P_1M_1} = \frac{OM}{OM_1}.$$

ಆದರೆ, $OP = OP_1$. ಆದುದರಿಂದ, ಚಿಹ್ನೆಗಳ ಸಹಿತ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ,

$PM = P_1M_1$, $OM = -OM_1$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

ಚಿತ್ರದಿಂದ,

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \underline{|XOP_1} = \frac{P_1M_1}{OP_1} = \frac{PM}{OP} = \sin\theta$$

$$\cos(\pi - \theta) = \cos \underline{|XOP_1} = \frac{OM_1}{OP_1} = \frac{-OM}{OP} = -\cos\theta$$

$$\tan(\pi - \theta) = \tan \underline{|XOP_1} = \frac{P_1M_1}{OM_1} = \frac{PM}{-OM} = -\tan\theta$$

ಅಂದರೆ,

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta, \quad \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta, \quad \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$$

$$\operatorname{cosec}(\pi - \theta) = \operatorname{cosec}\theta, \sec(\pi - \theta) = -\sec\theta, \cot(\pi - \theta) = -\cot\theta$$

ಈಗ, ಪರಿಭ್ರಮಿಸುತ್ತಿರುವ ರೇಖೆಯು OP_1 ಸ್ಥಾನದಿಂದ π ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳ ಮೂಲಕ ತಿರುಗಿ OP_2 ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಬಂದರೆ ಉಂಟಾಗುವ ಒಟ್ಟು ಕೋನವು $2\pi - \theta$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ $OP_1 = OP_2$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮೊದಲಿನ ವಾದಸರಣಿಯನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವುದರಿಂದ, $\sin(2\pi - \theta) = -\sin\theta$, $\cos(2\pi - \theta) = \cos\theta$, $\tan(2\pi - \theta) = -\tan\theta$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಅಲ್ಲದೆ, $\sin(n\pi - \theta) = -\sin\theta$ (n ಸಮಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ)

$= +\sin\theta$ (n ಬೆಸ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ)

$\cos(n\pi - \theta) = -\cos\theta$ (n ಬೆಸ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ)

$= \cos\theta$ (n ಸಮಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ)

ಎಂದು ಕೂಡ ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) $\sin 870° = \sin(5\pi - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$

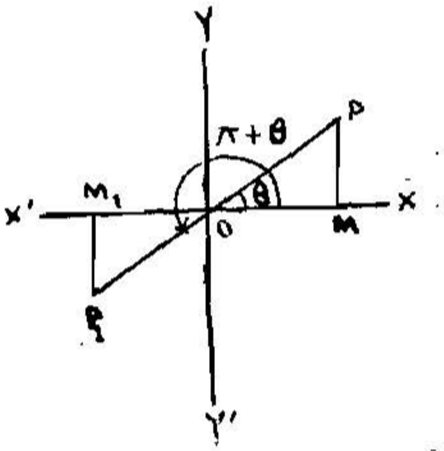
(2) $\cos 480° = \cos(3\pi - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

(3) $\sin 1035° = \sin(6\pi - 45°) = -\sin 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(4) $\cos 1395° = \cos(8\pi - 45°) = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

6·5 θ ಮತ್ತು $(180° + \theta)$ ಅಥವಾ $(\pi + \theta)$ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು

$\underline{|XOP} = \theta$ ಆಗಿರಲಿ. $PO = OP_1$ ಆಗಿರುವಂತೆ PO ರೇಖೆಯನ್ನು P_1 ಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 28). P ಮತ್ತು P_1 ಬಿಂದುಗಳಿಂದ PM ಮತ್ತು P_1M_1 ರೇಖೆಗಳನ್ನು X'OX ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 28

ಆಗ, $\underline{|XOP_1} = \pi + \theta$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ

ಹಾಗೂ, $\triangle POM \equiv \triangle P_1OM_1$

$[\because \underline{|MOP} = \underline{|M_1OP_1}, \ \underline{|OMP} = 90° = \underline{|OM_1P_1}, \ OP = OP_1]$

$\therefore$ ಚಿಹ್ನೆಗಳ ಸಹಿತ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$OM = -OM_1, \ PM = -P_1M_1.$

ಈಗ ಚಿತ್ರದಿಂದ,

$$\sin(\pi + \theta) = \sin \underline{|XOP_1} = \frac{P_1M_1}{OP_1} = \frac{-PM}{OP} = -\sin\theta$$

$$\cos(\pi + \theta) = \cos \underline{|XOP_1} = \frac{OM_1}{OP_1} = \frac{-OM}{OP} = -\cos\theta$$

$$\tan(\pi + \theta) = \tan \underline{|XOP_1} = \frac{P_1M_1}{OM_1} = \frac{-PM}{-OM} = \frac{PM}{OM} = \tan\theta.$$

ಆದುದರಿಂದ,

$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta, \ \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta, \ \tan(\pi + \theta) = \tan\theta,$

ಮತ್ತು,

$\cot(\pi + \theta) = \cot\theta, \sec(\pi + \theta) = -\sec\theta, \operatorname{cosec}(\pi + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta.$

ಪರಿಭ್ರಮಿಸುತ್ತಿರುವ ರೇಖೆಯು OP_1 ಸ್ಥಾನದಿಂದ ಮತ್ತೆ π ರೇಡಿಯನ್‌ಗಳ ಮೂಲಕ ತಿರುಗಿದರೆ ಅದು OP ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ಈಗ ಉಂಟಾದ ಕೋನವು $2\pi + \theta$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ, θ ಮತ್ತು $(2\pi + \theta)$ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

ಅಂದರೆ, $\sin(2n\pi + \theta) = \sin\theta$

$\cos(2n\pi + \theta) = \cos\theta$

$\tan(2n\pi + \theta) = \tan\theta$

ಇತ್ಯಾದಿ, n ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಾದರೂ (ಸಮ ಅಥವಾ ಬೆಸ ಪೂರ್ಣಾಂಕ) ಸತ್ಯ. ಹಾಗೂ ಪರಿಭ್ರಮಿಸುತ್ತಿರುವ ರೇಖೆಯು $(3\pi + \theta)$ ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸಿದಾಗ ಅದು ಮತ್ತೆ OP_1 ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, $(3\pi + \theta)$ ಮತ್ತು $(\pi + \theta)$ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

ಆದುದರಿಂದ, $\sin(3\pi + \theta) = \sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$,

$\cos(3\pi + \theta) = \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$,

$\tan(3\pi + \theta) = \tan(\pi + \theta) = \tan\theta$ ಇತ್ಯಾದಿ.

ಇದೇ ರೀತಿ,

$\sin(n\pi + \theta) = \sin\theta$ (n ಸಮಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ)

$= -\sin\theta$ (n ಬೆಸ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ)

$\cos(n\pi + \theta) = \cos\theta$ (n ಸಮಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ)

$= -\cos\theta$ (n ಬೆಸ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ)

ಎಂಬುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) $\sin 420° = \sin(2\pi + 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos 570° = \cos(3\pi + 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan 1665° = \tan(9\pi + 45°) = \tan 45° = 1$

ಅಭ್ಯಾಸ 6

ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(1) $\sin(-60°)$ (2) $\cos(-30°)$ (3) $\tan(-45°)$ (4) $\cot(-60°)$

(5) $\sec(-45°)$ (6) $\operatorname{cosec}(-30°)$ (7) $\sin 150°$ (8) $\cos 120°$ (9) $\tan 135°$

(10) $\cot 120°$ (11) $\sec 150°$ (12) $\operatorname{cosec} 135°$ (13) $\sin 225°$ (14) $\cos 240°$

(15) tan 315° (16) cot 210° (17) tan 225° (18) sec 210° (19) cosec 240°

(20) sin 300° (21) cos 330° (22) tan 300° (23) cot 330° (24) sec 300°

(25) cosec 330° (26) sin 750° (27) cos 780° (28) tan 660° (29) sin 1200°

(30) cos 1290° (31) tan 1215° (32) sec 1125° (33) cosec 960° (34) cot 870°.

(35) $\sin(270° + A) = -\cos A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(36) $\cos(270° - A) = -\sin A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(37) $\cot(270° - A) = \tan A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(38) $\cos(270° + A) = \sin A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(39) $\sec(270° + A) = +\operatorname{cosec} A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(40) $\operatorname{cosec}(270° - A) = -\sec A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ 7

ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳುಳ್ಳ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು

(ಮಿಶ್ರಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು—Trigonometrical Ratios of Compound Angles)

7.1 ಹಿಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಮುಖ್ಯ ಕೋನಗಳಾದ 30°, 45° ಇತ್ಯಾದಿಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ತಿಳಿದಿದ್ದಾಗಿದೆ. ಆದರೆ, ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 75° (45° + 30°), 15° (45° − 30°), ಇಂತಹ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಬಗೆಯನ್ನು ತಿಳಿದಿಲ್ಲ.

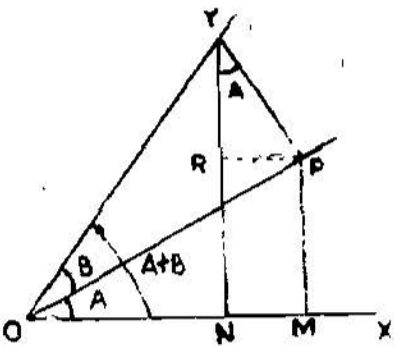
ಇಂತಹ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಲಾಗಿದೆ.

A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಮಿಶ್ರಕೋನಗಳೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ಇವುಗಳನ್ನು (A + B), (A − B) ರೂಪಗಳಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

7.2 (A + B) ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು

(A + B) ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು A ಮತ್ತು B ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

$\angle XOP = A$ ಆಗಿರಲಿ. $\angle POY = B$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ, $\angle XOY = (A + B)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 29). Y ಬಿಂದುವಿನಿಂದ OX ಮತ್ತು OP ರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ YN ಮತ್ತು YP ಎಂಬ ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದೇ ರೀತಿ P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ PM ಮತ್ತು PR ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ OX ಮತ್ತು YN ರೇಖೆಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 29

ಇಲ್ಲಿ RNMP ಒಂದು ಆಯ (Rectangle) ವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, RN = PM ಮತ್ತು RP = NM.

ಈಗ, $\angle A = \angle MOP = \angle OPR \quad (\because PR \parallel OM)$

ಆದರೆ, $\angle OPR = 90^\circ - \angle RPY = 90^\circ - (90^\circ - \angle PYR)$

$$= \angle PYR$$

$$\therefore \angle A = \angle PYR$$

ಅಲ್ಲದೆ,

ONY ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ,

$$\sin(A+B) = \frac{YN}{OY} = \frac{YR + RN}{OY} = \frac{YR + PM}{OY}$$

$$(\because RN = PM)$$

$$\therefore \sin(A+B) = \frac{YR}{OY} + \frac{PM}{OY}$$

$$= \frac{YR}{YP} \cdot \frac{YP}{OY} + \frac{PM}{OP} \cdot \frac{OP}{OY}$$

$$= \cos A . \sin B + \sin A . \cos B.$$

$$\therefore \sin(A+B) = \sin A . \cos B + \cos A . \sin B \qquad (1)$$

ಪುನಃ, YON ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ,

$$\cos(A+B) = \frac{ON}{OY} = \frac{OM - NM}{OY} = \frac{OM - RP}{OY}$$

$$(\because NM = RP)$$

$$= \frac{OM}{OY} - \frac{RP}{OY}$$

ಅಂದರೆ, $\cos(A+B) = \frac{OM}{OP} \cdot \frac{OP}{OY} - \frac{RP}{YP} \cdot \frac{YP}{OY}$

$$= \cos A . \cos B - \sin A . \sin B.$$

$$\therefore \cos(A+B) = \cos A . \cos B - \sin A . \sin B \qquad (2)$$

ಹಾಗೂ, $\tan(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)} = \frac{\sin A . \cos B + \cos A . \sin B}{\cos A . \cos B - \sin A . \sin B}$

$$= \frac{\frac{\sin A \cdot \cos B}{\cos A \cdot \cos B} + \frac{\cos A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B}}{\frac{\cos A \cdot \cos B}{\cos A \cdot \cos B} - \frac{\sin A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B}} = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B}$$

$$\therefore \tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} \qquad (3)$$

7.3 (A−B) ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು A ಮತ್ತು B ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸುವ ಕ್ರಮ

P ಮತ್ತು Q ಎಂಬ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಕೋನಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಆಗ,

$\sin(P + Q) = \sin P \cdot \cos Q + \cos P \cdot \sin Q$ ಎಂಬುದನ್ನು ಮೊದಲೇ ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಈ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ, $P = A$ ಮತ್ತು $Q = -B$ ಆದಾಗ,

$$\sin(A - B) = \sin A \cdot \cos(-B) + \cos A \cdot \sin(-B)$$

$$\therefore \sin(A - B) = \sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B$$

$$[\because \cos(-B) = \cos B, \ \sin(-B) = -\sin B]$$

ಅದೇ ರೀತಿ, $\cos(P + Q) = \cos P \cdot \cos Q - \sin P \cdot \sin Q$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $P = A$ ಮತ್ತು $Q = -B$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, ಆಗ,

$$\cos(A - B) = \cos A \cdot \cos(-B) - \sin A \cdot \sin(-B)$$
$$= \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B$$

$$[\because \cos(-B) = \cos B \ \sin(-B) = -\sin B]$$

$$\therefore \cos(A - B) = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B$$

ಹಾಗೂ, $\tan(A - B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \cdot \tan B}$

7.4 2 θ ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು θ ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವ ಕ್ರಮ

$\sin(A + B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $A = B = \theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, ಆಗ,

$$\sin 2\theta = \sin\theta.\cos\theta + \cos\theta.\sin\theta$$
$$= 2\sin\theta.\cos\theta$$
$$\therefore \sin 2\theta = 2\sin\theta.\cos\theta$$

ಅದೇ ರೀತಿ, $\cos(A+B) = \cos A.\cos B - \sin A.\sin B$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $A = B = \theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, ಆಗ,

$$\cos 2\theta = \cos\theta.\cos\theta - \sin\theta.\sin\theta$$
$$= \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

ಈಗ, $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - \sin^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$
ಅಥವಾ, $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$
ಆದುದರಿಂದ,

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$= 1 - 2\sin^2\theta$$
$$= 2\cos^2\theta - 1$$

ಹಾಗೂ, $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A.\tan B}$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ,

$A = B = \theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, ಆಗ,

$$\tan 2\theta = \frac{\tan\theta + \tan\theta}{1 - \tan\theta.\tan\theta}$$

$$\therefore \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

7.5 3θ ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು

7.2 ನೆಯ ಅನುಚ್ಛೇದದ (1), (2) ಮತ್ತು (3) ನೆಯ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ $A = 2\theta, B = \theta$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

ಆಗ,

$$\sin 3\theta = \sin(2\theta + \theta) = \sin 2\theta.\cos\theta + \cos 2\theta.\sin\theta \qquad (a)$$

$$\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta) = \cos 2\theta.\cos\theta - \sin 2\theta.\sin\theta \qquad (b)$$

$$\tan 3\theta = \tan(2\theta + \theta) = \frac{\tan 2\theta + \tan\theta}{1 - \tan 2\theta.\tan\theta} \qquad (c)$$

ಈಗ,

(*a*) ಸಮೀಕರಣದಿಂದ,

$$\sin 3\theta = 2\sin\theta.\cos\theta.\cos\theta + (1 - 2\sin^2\theta).\sin\theta$$

$$[\because \sin 2\theta = 2\sin\theta.\cos\theta, \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta]$$

$$= 2\sin\theta.\cos^2\theta + \sin\theta - 2\sin^3\theta$$

$$= 2\sin\theta(1 - \sin^2\theta) + \sin\theta - 2\sin^3\theta$$

$$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

$$\therefore \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.$$

(*b*) ಸಮೀಕರಣದಿಂದ,

$$\cos 3\theta = (2\cos^2\theta - 1).\cos\theta - 2\sin\theta.\cos\theta.\sin\theta$$

$$[\because \sin 2\theta = 2\sin\theta.\cos\theta, \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1]$$

$$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\sin^2\theta.\cos\theta$$

$$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta(1 - \cos^2\theta)$$

$$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

$$\therefore \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

(*c*) ಸಮೀಕರಣದಿಂದ,

$$\tan 3\theta = \frac{\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} + \tan\theta}{1 - \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}.\tan\theta}$$

$$= \frac{2\tan\theta + \tan\theta(1 - \tan^2\theta)}{1 - \tan^2\theta - 2\tan^2\theta}$$

$$= \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$$

$$\therefore \tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$$

7·6 θ ಮತ್ತು $\frac{\theta}{2}$ ಕೋನಗಳ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳು

$\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

ಆಗ,

$$\sin \theta = \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right) = \sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2} \cdot \sin\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \sin \theta = 2 \sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2}$$

ಹಾಗೂ, $\cos \theta = \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right) = \cos\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2} \cdot \sin\frac{\theta}{2}$

$$\cos \theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$= 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$= 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$$

$$\therefore \cos^2\frac{\theta}{2} = \tfrac{1}{2}(1 + \cos\theta)$$

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \tfrac{1}{2}(1 - \cos\theta)$$

ಮತ್ತು, $\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}$

ಇದೇ ರೀತಿ,

$$\tan \theta = \tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\tan\frac{\theta}{2} + \tan\frac{\theta}{2}}{1 - \tan\frac{\theta}{2} \cdot \tan\frac{\theta}{2}}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) 75° ಕೋನದ ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ :

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ . \cos 30^\circ + \cos 45^\circ . \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ . \cos 30^\circ - \sin 45^\circ . \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ . \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$\therefore \tan 75^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

ಹಾಗೂ, $\cot 75^\circ = \frac{1}{\tan 75^\circ} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

$$\sec 75^\circ = \frac{1}{\cos 75^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$$

$$\operatorname{cosec} 75^\circ = \frac{1}{\sin 75^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$$

(2) 15° ಕೋನದ sin, cos ಮತ್ತು tan ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ :

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ . \cos 30^\circ - \cos 45^\circ . \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos 15° = \cos (45° - 30°) = \cos 45° . \cos 30° + \sin 45° . \sin 30°$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \cos 15° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\tan 15° = \frac{\sin 15°}{\cos 15°} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

(3) $\sin 3A . \sin^3 A + \cos 3A . \cos^3 A = \cos^3 2A$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಎಡಬದಿ $= (3 \sin A - 4 \sin^3 A) \sin^3 A + (4 \cos^3 A - 3 \cos A) \cos^3 A$

$$= 3 \sin^4 A - 4 \sin^6 A + 4 \cos^6 A - 3 \cos^4 A$$

$$= 4 (\cos^6 A - \sin^6 A) - 3 (\cos^4 A - \sin^4 A)$$

ಅಂದರೆ, ಎಡಬದಿ

$$= 4 (\cos^2 A - \sin^2 A) (\cos^4 A + \cos^2 A . \sin^2 A + \sin^4 A)$$

$$- 3 (\cos^2 A - \sin^2 A) (\cos^2 A + \sin^2 A)$$

$$= (\cos^2 A - \sin^2 A) \ [4 (\cos^2 A + \sin^2 A)^2$$

$$- 4 \sin^2 A . \cos^2 A - 3]$$

$$= \cos 2A \ (1 - 4 \sin^2 A . \cos^2 A)$$

$$= \cos 2A \ (1 - 2 \sin A . \cos A . 2 \sin A . \cos A)$$

$$= \cos 2A (1 - \sin^2 2A)$$

$$= \cos 2A . \cos^2 2A$$

$= \cos^3 2A =$ ಬಲಬದಿ

$\therefore$ ಎಡಬದಿ = ಬಲಬದಿ.

(4) 18° ಮತ್ತು 36° ಕೋನಗಳ sin ಮತ್ತು cos ಪ್ರಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

A ಕೋನವು 18° ಯನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಲಿ. ಆಗ 2A ಮತ್ತು 3A ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 36° ಮತ್ತು 54° ಕೋನಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸುತ್ತವೆ.

ಆದುದರಿಂದ, $2A = 90^\circ - 3A$

$$\therefore \sin 2A = \sin(90^\circ - 3A) = \cos 3A$$

$$\therefore 2\sin A \cdot \cos A = 4\cos^3 A - 3\cos A$$

ಅಂದರೆ, $\cos A\,(2\sin A - 4\cos^2 A + 3) = 0$

$$\therefore \cos A = 0, \text{ ಅಥವಾ } 2\sin A = 4\cos^2 A - 3$$

$\cos A = 0$ ಆದಾಗ $A = 90^\circ$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಅವಶ್ಯಕತೆಯಿಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ,

$2\sin A = 4\cos^2 A - 3$ ಎಂಬುದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿದರೆ, ಆಗ, $4\sin^2 A + 2\sin A - 1 = 0$

$$\therefore \sin A = \frac{\pm\sqrt{5} - 1}{4}$$ (ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಕ್ರಮದಿಂದ)

$A = 18^\circ$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $\sin A$ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದುದರಿಂದ, $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$

ಮತ್ತು $\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ} = \sqrt{1 - \dfrac{6 - 2\sqrt{5}}{16}}$

$$= \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}}$$

$$\therefore \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

ಹಾಗೂ, $\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ$ $(\because \cos 2A = 1 - 2\sin^2 A)$

$$\therefore \cos 36^\circ = 1 - 2\left(\frac{6 - 2\sqrt{5}}{16}\right) = 1 - \frac{3 - \sqrt{5}}{4}$$

$$\therefore \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

$$\sin 36^\circ = \sqrt{1-\cos^2 36^\circ} = \sqrt{1 - \frac{6+2\sqrt{5}}{16}}$$

$$\therefore \sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

(5) $22\frac{1}{2}^\circ$ ಕೋನದ sin ಮತ್ತು cos ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

ಮೊದಲೇ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ,

$$\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \tfrac{1}{2}(1-\cos\theta)$$

$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \tfrac{1}{2}(1+\cos\theta)$$

ಈಗ, $\sin^2 \frac{45^\circ}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos 45^\circ)$

$$= \tfrac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \sin 22\tfrac{1}{2}^\circ = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$$

ಮತ್ತು, $\cos^2 \frac{45^\circ}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos 45^\circ) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$

$$\therefore \cos 22\tfrac{1}{2}^\circ = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$$

(6) $\cos 9x . \cos 6x + \sin 9x . \sin 6x = \cos 3x$ ಎಂದು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ : ಎಡಬದಿಯು, $\cos A . \cos B + \sin A . \sin B$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ, ಅದು $\cos (A - B)$ ಗೆ ಸಮನಾಗಿರಬೇಕು.

ಅಂದರೆ, $\cos 9x . \cos 6x + \sin 9x . \sin 6x = \cos (9x - 6x)$

$$\therefore \cos 9x . \cos 6x + \sin 9x . \sin 6x = \cos 3x.$$

(7) $\sin 8x . \cos 2x - \cos 8x . \sin 2x = \sin 6x$ ಎಂದು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ : ಎಡಬದಿಯು $\sin A . \cos B - \cos A . \sin B$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ, ಅದು $\sin (A - B)$ ಗೆ ಸಮನಾಗಿರಬೇಕು.

ಅಂದರೆ, $\sin 8x . \cos 2x - \cos 8x . \sin 2x = \sin (8x - 2x)$

$\therefore \sin 8x . \cos 2x - \cos 8x . \sin 2x = \sin 6x.$

(8) $\cos 5x . \cos 3x - \sin 5x . \sin 3x = \cos 8x$ ಎಂದು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ : ಎಡಬದಿಯು $\cos A . \cos B - \sin A . \sin B$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

$\therefore$ ಎಡಬದಿ $= \cos (5x + 3x)$ $[\because \cos A . \cos B - \sin A . \sin B = \cos (A + B)]$

$= \cos 8x =$ ಬಲಬದಿ.

$\therefore$ ಎಡಬದಿ $=$ ಬಲಬದಿ.

(9) $\sin 4x . \cos 5x + \cos 4x . \sin 5x = \sin 9x$ ಎಂದು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ :

ಎಡಬದಿ $= \sin (4x + 5x)$ $[\because \sin A . \cos B + \cos A . \sin B = \sin (A + B)]$

$= \sin 9x =$ ಬಲಬದಿ.

$\therefore$ ಎಡಬದಿ $=$ ಬಲಬದಿ.

(10) $\dfrac{\tan 5x - \tan 3x}{1 + \tan 5x . \tan 3x} = \tan 2x$ ಎಂದು ಸ್ಥಾಪಿಸಿರಿ :

ಎಡಬದಿಯು, $\dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A . \tan B}$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅದು $\tan (A - B)$ ಗೆ ಸಮನಾಗಿರಬೇಕು.

$\therefore$ ಎಡಬದಿ $= \tan (5x - 3x) = \tan 2x =$ ಬಲಬದಿ.

7.7 : 7.2 ಮತ್ತು 7.3 ಅನುಚ್ಛೇದಗಳ ಪ್ರಕಾರ,

$\sin (A + B) = \sin A . \cos B + \cos A . \sin B$ (1)

$\sin (A - B) = \sin A . \cos B - \cos A . \sin B$ (2)

$\cos (A + B) = \cos A . \cos B - \sin A . \sin B$ (3)

$\cos (A - B) = \cos A . \cos B + \sin A . \sin B$ (4)

(1) + (2), (1) − (2), (3) + (4), (3) − (4), ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, $A + B = C$, $A - B = D$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ, ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿದರೆ,

ಆಗ,

$$\sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C + D}{2} \cdot \cos \frac{C - D}{2}$$

$$\sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C + D}{2} \cdot \sin \frac{C - D}{2}$$

$$\cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C + D}{2} \cdot \cos \frac{C - D}{2}$$

$$\cos C - \cos D = 2 \sin \frac{C + D}{2} \cdot \sin \frac{D - C}{2}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

ಇವುಗಳನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿರಿ :

(1) $\sin 4A + \sin 2A$:

$$\sin 4A + \sin 2A = 2 \sin \frac{4A + 2A}{2} \cdot \cos \frac{4A - 2A}{2}$$

$$= 2 \sin 3A \cdot \cos A.$$

(2) $\sin 6A - \sin 4A$:

$$\sin 6A - \sin 4A = 2 \cos \frac{6A + 4A}{2} \cdot \sin \frac{6A - 4A}{2}$$

$$= 2 \cos 5A \cdot \sin A.$$

(3) $\cos 10A + \cos 6A$:

$$\cos 10A + \cos 6A = 2 \cos \frac{10A + 6A}{2} \cdot \cos \frac{10A - 6A}{2}$$

$$= 2 \cos 8A \cdot \cos 2A.$$

(4) $\cos 3A - \cos 9A$:

$$\cos 3A - \cos 9A = 2 \sin \frac{3A + 9A}{2} \cdot \sin \frac{9A - 3A}{2}$$

$$= 2 \sin 6A \cdot \sin 3A.$$

ಅಭ್ಯಾಸ 7

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮಾಣಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(1) $\cos 105^\circ$ (2) $\tan 75^\circ$ (3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ (4) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$

(5) $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$ (6) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$ (7) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$ (8) $\sin 135^\circ$

(9) $\cos 135^\circ$ (10) $\tan 135^\circ$ (11) $\sec 120^\circ$ (12) $\operatorname{cosec} 150^\circ$ (13) $\cot 105^\circ$

(14) $\sin A = \frac{12}{13}$, $\cos B = \frac{3}{5}$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $\sin(A+B)$, $\cos(A-B)$

ಮತ್ತು $\tan(A-B)$ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ :

(15) $\sin(45^\circ - A).\cos(45^\circ - B) + \cos(45^\circ - A).\sin(45^\circ - B)$
$= \cos(A+B)$

(16) $\cos(45^\circ + A).\cos(45^\circ - B) - \sin(45^\circ + A).$
$\sin(45^\circ - B) = -\sin(A-B)$.

(17) $\frac{\sin 7\theta - \sin\theta}{\sin 8\theta - \sin 2\theta} = \cos 4\theta.\sec 5\theta$

(18) $\frac{\cos 2A - \cos 6A}{\cos 5A + \cos 3A} = 2\tan 4A.\sin A$

(19) $\sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \sin 40^\circ + \sin 50^\circ = \sin 70^\circ + \sin 80^\circ$

(20) $\sin\theta = \frac{2\cot\frac{\theta}{2}}{1+\cot^2\frac{\theta}{2}}$

(21) $\cos\theta = \frac{\cot^2\frac{\theta}{2} - 1}{\cot^2\frac{\theta}{2} + 1}$

(22) $\cos A = \frac{4}{5}$ ಆದಾಗ, $\sin 2A$, $\cos 2A$, $\cot 2A$, $\sin\frac{A}{2}, \cos\frac{A}{2}$ ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(23) $\sin\frac{A}{2} = \frac{3}{5}$, $\cos\frac{B}{2} = \frac{1}{2}$ ಆದಾಗ, $\frac{\sin A + \cos B}{\sin A - \cos B}$ ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(24) $\tan\theta = \frac{a}{b}$ ಆದರೆ, $b\cos 2\theta + a\sin 2\theta$, ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರಗಳು

ಅಧ್ಯಾಯ 1

1. (i) 60^g (ii) 80^g (iii) 90^g (iv) $(133)^g\ 33'\ 33''\frac{1}{3}$.

2. (i) $\frac{7\pi}{20}$ (ii) $\frac{221}{400}\pi$ (iii) $\frac{3\pi}{4}$ (iv) $\frac{7\pi}{8}$;

3. (i) $351°$ (ii) $68°\ 24'$ (iii) $2520°$ (iv) $72°$.

4. $87\frac{7^g}{9}$.

5. $81°$ ಮತ್ತು $9°$.

ಅಧ್ಯಾಯ 2 (ಅ)

(1) $\frac{3}{20}$ (2) $\cos A = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\tan A = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cot A = \sqrt{2}$,

$\sec A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. $\text{cosec}\, A = \sqrt{3}$.

(3) $\sin\theta = \frac{\sqrt{13}}{7}$, $\cos\theta = \frac{6}{7}$, $\tan\theta = \frac{\sqrt{13}}{6}$, $\sec\theta = \frac{7}{6}$,

$\text{cosec}\,\theta = \frac{7}{\sqrt{13}}$

(4) $\cos\theta = \frac{15}{17}$, $\text{cosec}\,\theta = \frac{17}{8}$

(5) $\sec A = \frac{3}{\sqrt{5}}$, $\cot A = \frac{\sqrt{5}}{2}$

(6) $\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan A = 1$

(7) 81

ಅಧ್ಯಾಯ 2 (ಆ)

(7) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-3}{4}$ (8) $1\frac{1}{2}$ (9) 0 (10) $2\frac{2}{3}$.

ಅಭ್ಯಾಸ 3

(1) 126 ಅಡಿಗಳು (2) 129·8 ಅಡಿಗಳು (3) 30° (4) 64·9 ಮತ್ತು 112·5 ಅಡಿಗಳು (5) 160 ಮತ್ತು 160 ಅಡಿಗಳು. (6) 25·38 ಮತ್ತು 44·1. ಅಡಿಗಳು.

ಅಭ್ಯಾಸ 6

(1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) -1 (4) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (5) $\sqrt{2}$ (6) -2

(7) $\frac{1}{2}$ (8) $-\frac{1}{2}$ (9) -1 (10) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (11) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ (12) $\sqrt{2}$

(13) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (14) $-\frac{1}{2}$ (15) -1 (16) $\sqrt{3}$ (17) 1 (18) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$

(19) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ (20) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (21) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (22) $-\sqrt{3}$ (23) $-\sqrt{3}$

(24) 2 (25) -2 (26) $\frac{1}{2}$ (27) $\frac{1}{2}$ (28) $-\sqrt{3}$ (29) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(30) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (31) -1 (32) $\sqrt{2}$ (33) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ (34) $-\sqrt{3}$.

ಅಭ್ಯಾಸ 7

(1) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ (2) $2+\sqrt{3}$ (3) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ (4) 1 ;

(5) $2-\sqrt{3}$ (6) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (7) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (8) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (9) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

(10) -1 (11) -2 (12) 2 (13) $\sqrt{3}-2$ (14) $\frac{56}{65}$, $\frac{63}{65}$

ಮತ್ತು $\frac{16}{63}$ (22) $\frac{24}{25}$, $\frac{7}{25}$, $\frac{7}{24}$, $\frac{1}{\sqrt{10}}$ ಮತ್ತು $\frac{3}{\sqrt{10}}$ (23) $\frac{23}{73}$,

(24) b.

ಕ್ಷೇತ್ರಗಣಿತ

ಅಧ್ಯಾಯ 1

ಚಾರಿತ್ರಿಕ ಹಿನ್ನೆಲೆ, ಗಿಡಗಳನ್ನು ನೆಡುವುದು ಮತ್ತು ಬೇಲಿ ಹಾಕುವುದು

1.1 ವಸ್ತುಗಳ ಅಥವಾ ಸಮತಲದ ಘನ ಪರಿಮಾಣ, ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ, ಸುತ್ತಳತೆ ಇವೇ ಮೊದಲಾದ ಭೂಮಿತಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ವಿಭಾಗಕ್ಕೆ **ಕ್ಷೇತ್ರಗಣಿತ** ಎಂದು ಹೆಸರು. ನಮ್ಮ ನಿತ್ಯಜೀವನದಲ್ಲಿ ಇದರ ಉಪಯೋಗವು ಅನೇಕ ರೀತಿಯಲ್ಲಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ನಿಮ್ಮ ಮನೆ ಅಥವಾ ಜಮೀನಿಗೆ ಬೇಲಿ ಹಾಕಿಸಬೇಕೆಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ. ಆಗ ಆ ಕ್ಷೇತ್ರದ ಸುತ್ತಳತೆ ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ ಬೇಲಿ ಹಾಕಿಸಲು ಆಗುವ ಖರ್ಚನ್ನು ಮುಂದಾಗಿ ತಿಳಿಯಲು ಅನುಕೂಲವಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗೆಯೇ ತೆಂಗಿನ ಸಸಿ ಹಾಕಬೇಕಾದರೆ, ತೋಟದ ಒಟ್ಟು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ (ವಿಸ್ತೀರ್ಣ) ತಿಳಿದಿದ್ದು ಒಟ್ಟು ಬೇಕಾಗುವ ತೆಂಗಿನ ಸಸಿಯನ್ನೂ ತಗಲುವ ಖರ್ಚನ್ನೂ ಮುಂದಾಗಿ ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ ಎಷ್ಟೊಂದು ಅನುಕೂಲವಾಗುತ್ತದೆ !

ಇದರಂತೆಯೇ, ಘನ ಪರಿಮಾಣಗಳೂ ಅನೇಕ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಬಾವಿ ತೋಡಿಸಿದಾಗ ಅದರಲ್ಲಿರುವ ನೀರಿನ ಪರಿಮಾಣ ತಿಳಿದರೆ ನೀರನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವಾಗ ಎಚ್ಚರಿಕೆವಹಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾದೀತು.

ಮೊದಲು, ಗಿಡಗಳನ್ನು ನೆಡುವ ಮತ್ತು ಬೇಲಿ ಹಾಕುವ ಕಾರ್ಯಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗುವ ಕ್ಷೇತ್ರಗಣಿತದ ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಅನಂತರ ಸಮತಲಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಮತ್ತು ಘನವಸ್ತುಗಳ ಘನ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸೋಣ.

1.2 ಗಿಡಗಳನ್ನು ನೆಡುವುದು ಮತ್ತು ಬೇಲಿ ಹಾಕುವುದು

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ಜಮೀನಿನಲ್ಲಿ ಗಿಡ ನೆಡುವಾಗ ಇಲ್ಲವೇ ಬೇಲಿ ಹಾಕುವಾಗ ಉಪಯೋಗವಾಗುವಕ್ಷೇತ್ರಗಣಿತವನ್ನು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಗಿಡ ನೆಡುವುದನ್ನು ಕುರಿತ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(1) 150′ ಅಗಲದ ಭೂಮಿಯಲ್ಲಿ 4′ 2″ ಕ್ಕೆ ಒಂದರಂತೆ ಎಷ್ಟು ಪಾತಿಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು ?

$$\text{ಒಟ್ಟು ಪಾತಿ} = \frac{\text{ಭೂಮಿಯ ಅಗಲ}}{\text{ಪಾತಿಗಳ ಅಂತರ}} = \frac{150'}{4'2''}$$

$$= \frac{150'}{\left(\frac{25}{6}\right)'}$$

$$= \frac{150 \times 6}{25}$$

$= 36$ ಪಾತಿಗಳು.

(2) ಸೌತೇಕಾಯಿ ಗಿಡವನ್ನು 3′ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ನೆಡಬೇಕು. ಒಂದೊಂದು 18 ಅಡಿ ಉದ್ದವಿರುವ ಒಟ್ಟು 36 ಪಾತಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಸೌತೆಗಿಡಗಳನ್ನು ನೆಡಬಹುದು?

ಪಾತಿಗಳ ಒಟ್ಟು ಉದ್ದ $= (36 \times 18)$ ಅಡಿಗಳು.

ಗಿಡಗಳ ನಡುವೆ ಇರಬೇಕಾದ ಅಂತರ 3 ಅಡಿ.

$\therefore$ ಬೇಕಾಗುವ ಸೌತೆಗಿಡಗಳು $= \frac{36 \times 18}{3} = 216$

ಬೇಲಿ ಹಾಕುವುದನ್ನು ಕುರಿತ ಉದಾಹರಣೆ

ರೈತನೊಬ್ಬ ಒಂದು ಆಯಾಕೃತಿಯ ಜಮೀನಿನ ಸುತ್ತ ಬೇಲಿ ಹಾಕಿಸಲು ಇಚ್ಛಿಸುತ್ತಾನೆ. ಆ ಜಮೀನಿನ ಉದ್ದ 3420 ಗಜಗಳೂ, ಅಗಲ 2530 ಗಜಗಳೂ ಇದ್ದರೆ, 2 ಗಜಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಗೂಟದಂತೆ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಗೂಟಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ? ಮತ್ತು ಗೂಟ ಒಂದಕ್ಕೆ 2 ರೂ. ನಂತೆ ಬೇಲಿ ಹಾಕಲು ಬೇಕಾಗುವ ಗೂಟಗಳ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ ಏನು ?

ಜಮೀನಿನ ಸುತ್ತಳತೆ $= 2$ (ಉದ್ದ + ಅಗಲ)

$= 2\ (3420 + 2530)$

$= 2\ (5950)$ ಗಜಗಳು

ಬೇಲಿ ಹಾಕಬೇಕಾದ ಒಟ್ಟು ಉದ್ದ $= (2 \times 5950)$ ಗಜಗಳು

ಬೇಕಾಗುವ ಒಟ್ಟು ಗೂಟಗಳು $= \frac{2 \times 5950}{2}$

$= 5950$

ಗೂಟಕ್ಕೆ 2 ರೂ. ನಂತೆ ಒಟ್ಟು ಗೂಟಗಳ ಬೆಲೆ $= 5950 \times 2$

$= 11{,}900$ ರೂ.

ಅಭ್ಯಾಸ 1

(1) ಒಂದು ತೆಂಗಿನ ಸಸಿಗೂ ಇನ್ನೊಂದಕ್ಕೂ ನಡುವೆ 16′ ಅಂತರವಿರುವಂತೆ, ಚೌಕಾಕೃತಿಯ ಒಂದು ಎಕರೆ ಜಮೀನಿನಲ್ಲಿ ನೆಡಬಹುದಾದ ತೆಂಗಿನ ಸಸಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಯೆಷ್ಟು ?

(2) ಮೆಣಸಿನಕಾಯಿ ಗಿಡಗಳನ್ನು ನೆಡುವಾಗ ಅವುಗಳ ಪಾತಿಗಳ ಅಂತರ 6″ ಗಳಾದರೆ, 60″ ಅಗಲದ ಕೈತೋಟದಲ್ಲಿ ಇರುವ ಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಷ್ಟು ?

(3) 5200′ ಅಗಲದ ತೋಟದಲ್ಲಿ 85 ಸಾಲುಗಳಿದ್ದರೆ, ಆ ಸಾಲುಗಳ ನಡುವಣ ಅಂತರವೇನು ?

(4) 14″ ಗಳ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಆಲೂಗೆಡ್ಡೆಗಳನ್ನು ನೆಡಲು 2520′ ಅಗಲದ ತೋಟ ದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಮಾಡಬೇಕು ?

(5) 40′ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಒಂದರಂತೆ ಒಂದು ಎಕರೆಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಸೇಬಿನ ಮರ ಗಳಿರುತ್ತವೆ ?

(6) ಒಬ್ಬ ರೈತನು ಚೌಕಾಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ತನ್ನ ಜಮೀನಿಗೆ ಬೇಲಿ ಹಾಕಲು ಇಚ್ಛಿಸುತ್ತಾನೆ. ಅವನ ಜಮೀನಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಒಂದು ಎಕರೆ ಆದರೆ, 4′ ಅಂತರ. ವಿರುವಂತೆ ಕಲ್ಲು ಗೂಟಗಳನ್ನು ನೆಡಲು ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಗೂಟಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ ?

(7) ಒಂದು ಚದರ ಮೈಲಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವುಳ್ಳ ಚೌಕಾಕಾರದ ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ನೆಡಲು 8′ ಗೆ ಒಂದು ಗೂಟದಂತೆ ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಗೂಟಗಳು ಬೇಕು ? ಒಂದು ಗೂಟದ ಬೆಲೆ 1 ರೂ. 20 ಪೈಸೆ ಆದರೆ ಗೂಟಗಳ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆಯೇನು ?

(8) 87′ 11″ ಉದ್ದ ಮತ್ತು 35′ 5″ ಅಗಲ ಇರುವ ಒಂದು ಆಯಾಕಾರದ ಭೂಮಿಗೆ ಬೇಕಾಗುವ ಬೇಲಿಯ ಉದ್ದವೇನು ?

(9) 3600 ಚದರ ಗಜ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಚೌಕಾಕೃತಿಯ ಭೂಮಿಗೆ ಬೇಲಿ ಹಾಕಬೇಕಾಗಿದೆ. ಆ ಬೇಲಿಯ ಉದ್ದವೇನು ? ಬೇಲಿಗೆ ಬಳಸಿರುವ ಗೂಟಗಳ ಎತ್ತರ 6 ಅಡಿಗಳಾಗಿದ್ದು ಅವಕ್ಕೆ 6″ ಗಳ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ತಂತಿಗಳನ್ನು ಬಿಗಿಯಲಾಗಿದೆ. 1 ಗಜ ತಂತಿಯ ಬೆಲೆ 2 ರೂ. ಆದರೆ, ಬಳಸಿರುವ ತಂತಿಯ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆಯೇನು ?

(10) 87 ರಾಡ್ 6 ಅಡಿ ಉದ್ದ ಮತ್ತು 35 ರಾಡ್ 12 ಅಡಿ ಅಗಲ ಇರುವ ಆಯಾಕಾರದ ಜಮೀನಿಗೆ ಬೇಕಾಗುವ ಬೇಲಿಯ ಉದ್ದವೇನು ? (1 ರಾಡ್ = $16\frac{1}{2}$′)

ಅಧ್ಯಾಯ 2

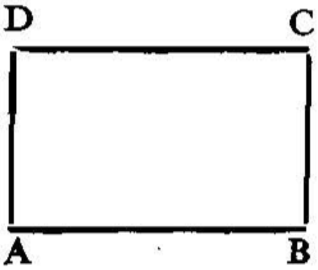
ಸಮತಲಗಳ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳು

(PERIMETERS AND AREAS OF PLANES)

2.1 ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ (Geometric) ನಿಶ್ಚಿತ ಆಕೃತಿಗಳ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಮೊದಲು ತಿಳಿದುಕೊಂಡರೆ, ಅನಂತರ ಅವುಗಳನ್ನು ದತ್ತ ಅನಿಶ್ಚಿತ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನಾಗಲೀ ಅಥವಾ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನಾಗಲೀ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಅನುಕೂಲವಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೆಲವು ನಿಶ್ಚಿತ ಆಕೃತಿಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ :

2.2 ಆಯಾಕೃತಿ



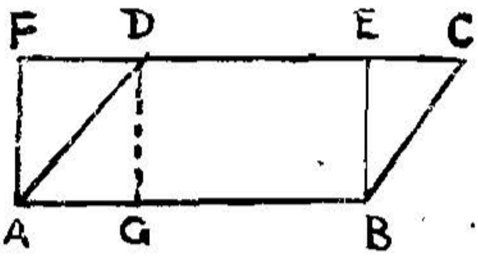
ಚಿತ್ರ 1

ಒಂದು ಆಯಾಕೃತಿ ABCD ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= AB \times BC =$ ಉದ್ದ $\times$ ಅಗಲ. ABCD ಆಯಾಕೃತಿಯ ಸುತ್ತಳತೆ $= 2\,(AB + BC) = 2$ (ಉದ್ದ $+$ ಅಗಲ) (ಚಿತ್ರ 1)

ಈ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಮೂಲವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಇನ್ನಿತರ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಆಕೃತಿಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ :

2.3 ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

ABCD ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿರಲಿ. ಹಾಗೆಯೇ ABEF ಅದೇ ಪಾದದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು ಅದೇ ಸಮಪಾತಳಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಆಯಾಕೃತಿಯಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 2).



ಚಿತ್ರ 2

ಈಗ, AFD ಮತ್ತು BEC ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ ನೋಡಿದರೆ,

$AD = BC$, $BE = AF$, $B\hat{E}C = A\hat{F}D$. ಆದ್ದರಿಂದ, ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳೂ ಎಲ್ಲಾ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಅವೆರಡರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳೂ ಸಮನಾಗಿರುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

∴ △AFD + ABED ಆಕೃತಿ = △BEC + ABED ಆಕೃತಿ.

ಅಂದರೆ, AF BE ಆಯಾಕೃತಿ = ABCD ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ

∴ AFBE ಆಯಾಕೃತಿಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

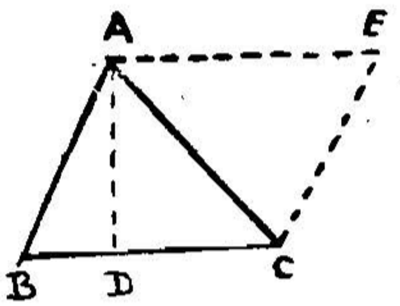
= ABCD ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

= AB × AF (= ಉದ್ದ × ಅಗಲ)

= AB × DG

= ಉದ್ದ × ಎತ್ತರ

2.4 ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ



ಚಿತ್ರ 3

ABC ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 3) ಮತ್ತು AD ಯು BC ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರಲಿ. AB ಗೆ C ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಯು, A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ BC ಗೆ ಎಳೆದ ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಯನ್ನು E ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ABCE ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಯಿತು. AC ಯನ್ನು ಕರ್ಣವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ ಅದು ABCE ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

∴ △ ABC = △ ACE

AD ಯು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಎತ್ತರ.

ABCE ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = BC × AD (= ಪಾದ × ಎತ್ತರ)

ಮತ್ತು ABCE ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = [△ ACE + △ ABC] ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

= 2 [△ ABC] ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

∴ △ ABC ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = $\frac{1}{2}$ ABCE ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

= $\frac{1}{2}$ (ಪಾದ × ಎತ್ತರ)

ಟಿಪ್ಪಣಿ : a, b, ಮತ್ತು c ಎಂಬ ಅಕ್ಷರಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ BC, AC ಮತ್ತು AB ಭುಜಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದರೆ ಮತ್ತು $2s$ ಎಂಬುವುದು ತ್ರಿಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದರೆ,

ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

ಇಲ್ಲಿ, $2s = a + b + c$

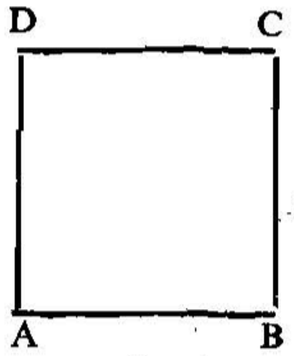
ಅಥವಾ $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

2.5 ಚೌಕದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

ABCD ಒಂದು ಚೌಕವಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 4). **ಚೌಕ** ಎಂಬುದು ಆಯದ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸನ್ನಿವೇಶದ ಆಕೃತಿ. ಇಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳೂ ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ, ಉದ್ದ = ಅಗಲ ಆಗುತ್ತದೆ.

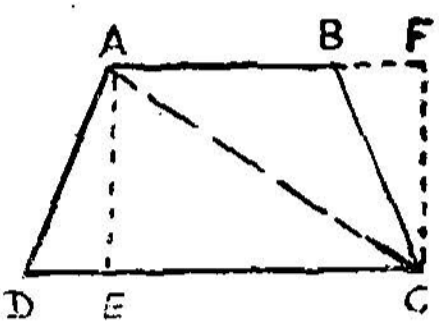
$\therefore$ ಚೌಕದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= AB \times BC$

$= (AB)^2$



ಚಿತ್ರ 4

2.6 ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ



ಚಿತ್ರ 5

ABCD ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರ 5) AE ಯನ್ನು DC ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆದು ಫಲಿತ ಆಕೃತಿ ABCE ಯಲ್ಲಿ AC ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿ. ಅನಂತರ C ನಿಂದ AB ಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ವೃದ್ಧಿಸಿದ AB ಯನ್ನು F ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ.

$\therefore$ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ABCD ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

$= \triangle ABC$ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $+ \triangle DCA$ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

$= \frac{1}{2} AB \times CF + \frac{1}{2} DC \times AE$

ಆದರೆ, $CF = AE$

ಈಗ $CF = AE = h$ ಆಗಿರಲಿ.

$AB = a,\ DC = b$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore$ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= \frac{1}{2}\, a\cdot h + \frac{1}{2}\, b\cdot h$

$= \frac{1}{2}(a+b)h$

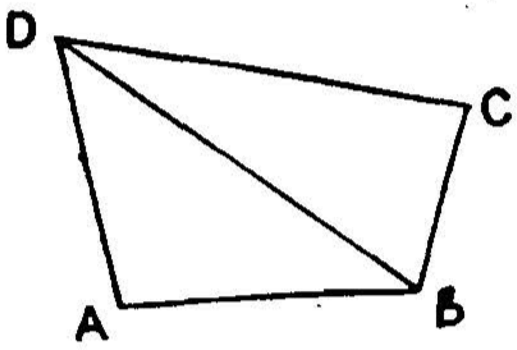
$= \frac{1}{2}$ (ಸಮಾನಾಂತರ ಭುಜಗಳ ಮೊತ್ತ) $\times$ ಎತ್ತರ

2.7 ಚತುರ್ಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

ಯಾವುದೇ ಚತುರ್ಭುಜವಾದರೂ ಆದರ ಕರ್ಣವನ್ನು ಸೇರಿಸಿ. ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಫಲಿತಾಕೃತಿಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ಆಗ,

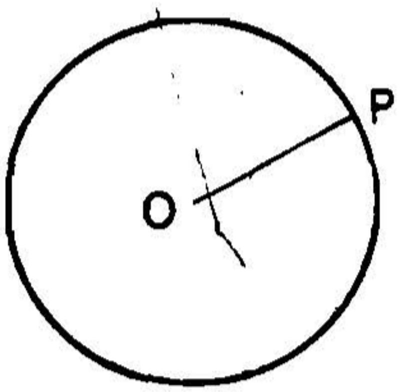
ಚತುರ್ಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = ಫಲಿತ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳ ಮೊತ್ತ,



ಚಿತ್ರ 6

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ABCD ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜ (ಚಿತ್ರ 6). BD ಕರ್ಣವನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರ ABD ಮತ್ತು BDC ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಉಂಟಾಗುತ್ತವೆ. ಈಗ, ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = $\triangle$ ABD ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ + $\triangle$ BDC ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ.

2.8 ವೃತ್ತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ



ಚಿತ್ರ 7

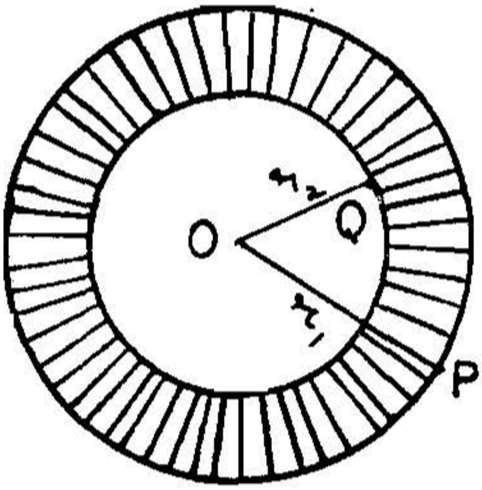
'O' ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಇರುವ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ OP ಆಗಿರಲಿ. ಈಗ OP $= r$ ಆದರೆ, ವೃತ್ತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= \pi r^2$ (ಚಿತ್ರ 7).

['π' (ಪೈ) ಎಂಬುದು ನಿಯತಾಂಕ. ಇದರ ಬೆಲೆ $\pi = 3\cdot 14\ldots$].

ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ $= 2\pi r$.

2.9 ವರ್ತುಲಾಕೃತಿ ಅಥವಾ ಉಂಗುರದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

'O' ಎಂಬ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವುಳ್ಳ ಒಂದು ಉಂಗುರವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ 'O' ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತದ ಹೊರ ಮೇಲ್ಮೈಯಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದು P ಯ ದೂರ OP $= r_1$ ಆಗಿರಲಿ. ಹಾಗೆಯೇ ಒಳ ಮೇಲ್ಮೈಯಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದು Q ನ ದೂರ OQ $= r_2$ ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 8).



r_1 ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= \pi r_1^2$

r_2 ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= \pi r_2^2$

∴ ಉಂಗುರದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= \pi r_1^2 - \pi r_2^2$

$= \pi (r_1^2 - r_2^2)$

$= \pi (r_1 + r_2)\ (r_1 - r_2)$

ಚಿತ್ರ 8

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) ಎಕರೆಗೆ 4,000 ರೂ ನಂತೆ 300 ರಾಡ್ ಪಾದದ ಅಳತೆಯೂ, 75 ರಾಡ್ ಎತ್ತರವೂ ಇರುವ ತ್ರಿಭುಜಾಕೃತಿಯ ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2}$ (ಪಾದ) $\times$ ಎತ್ತರ

∴ ತ್ರಿಭುಜಾಕೃತಿಯ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2}(300) \times 75$

$= 11250$ ಚದರ ರಾಡ್‌ಗಳು.

160 ಚದರ ರಾಡ್‌ಗಳು $= 1$ ಎಕರೆ

∴ 11250 ಚದರ ರಾಡ್‌ಗಳು $= \frac{11250}{160} = \left(\frac{1125}{16}\right)$ ಎಕರೆಗಳು

1 ಎಕರೆ ಪ್ರದೇಶಕ್ಕೆ — 4,000 ರೂ. ಗಳು.

∴ $\left(\frac{1125}{16}\right)$ ಎಕರೆ ಪ್ರದೇಶಕ್ಕೆ — $\frac{1125}{16} \times \frac{4000}{1}$

$= 2{,}81{,}250$ ರೂ. ಗಳು.

(2) ಒಂದು ಹಳ್ಳದ ಅಡ್ಡ ಕೊಯ್ತವು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದಂತಿದೆ. ಅದರ ಸಮಾನಾಂತರ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದ 30″, ಮತ್ತು 16″ ಮತ್ತು ಆಳ 6″ ಗಳಾದರೆ, ಅಡ್ಡ ಕೊಯ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2}(a + b)h$

ಇಲ್ಲಿ, $a = 30''$, $b = 16''$ ಮತ್ತು $h = 6''$

$\therefore$ ಅಡ್ಡ ಕೊಯ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2}(30 + 16) \times 6$

$= 3(46)$

$= 138$ ಚದರ ಅಂಗುಲಗಳು.

(3) 8 ಅಡಿ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಚಿಲುಮೆಯ ಸುತ್ತ 4 ಅಡಿ ಅಗಲದ ಹುಲ್ಲು ಇದ್ದರೆ ಆ ಹುಲ್ಲು ಬೆಳೆದಿರುವ ಜಾಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವೇನು ?

ಹುಲ್ಲು ಬೆಳೆದಿರುವ ಜಾಗವನ್ನು ಉಂಗುರದಂತೆ ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು. ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಹುಲ್ಲಿನ ಒಳ ಮುಖದ ದೂರ $8'$, ಹೊರ ಮುಖದ ದೂರ $= 8 + 4 = 12'$ (ಚಿತ್ರ 9)

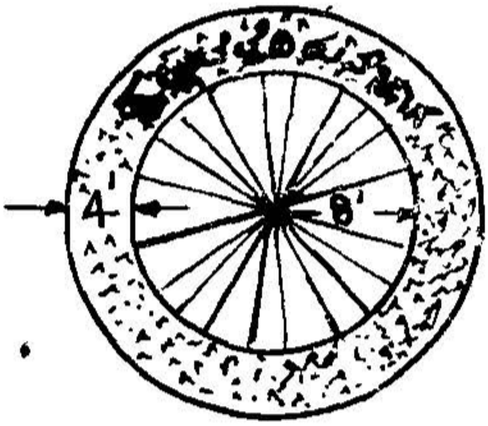
$\therefore$ ಹುಲ್ಲು ಬೆಳೆದಿರುವ ಜಾಗದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= \pi(r_1 + r_2)(r_1 - r_2)$

$= 3{\cdot}14(12 + 8)(12 - 8)$

$= 3{\cdot}14 \times 20 \times 4$

$= 251{\cdot}20$

$= 251{\cdot}2$ ಚದರ ಅಡಿ.



ಚಿತ್ರ 9

ಅಭ್ಯಾಸ 2

(1) ಒಬ್ಬ ರೈತನ ಜಮೀನು ಆಯಾಕಾರದಲ್ಲಿದೆ. ಆ ಜಮೀನಿನ ಸುತ್ತಳತೆ 3200′ ಇದ್ದು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 23775 ಚದರ ಅಡಿಗಳಾದರೆ, ಆ ಜಮೀನಿನ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳೇನು ?

(2) ಒಂದು ಕಿಟಕಿಯ ಉದ್ದ 2·25ಮೀ. ಮತ್ತು ಅಗಲ 0·75 ಮೀ. ಆ ಕಿಟಕಿಯ ಸುತ್ತಲೂ ಮರದ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಹೊಡೆದಿದ್ದರೆ, ಆ ಪಟ್ಟಿಯ ಉದ್ದವೇನು ?

(3) ಒಂದು ಜಮೀನಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 2 ಎಕರೆಗಳು. ಆ ಜಮೀನು ಆಯಾಕಾರದಲ್ಲಿದ್ದ, ಜಮೀನಿನ ಒಂದು ಭಾಗಕ್ಕೆ ಹಾಕಿರುವ ಬೇಲಿಯ ಉದ್ದ 80 ಗಜಗಳಾದರೆ, ಇನ್ನೊಂದು ಭಾಗದ ಬೇಲಿಯ ಉದ್ದವೇನು ?

(4) ಒಂದು ಮಹಡಿಯ ಮೆಟ್ಟಿಲುಗಳ ತಳಭಾಗವು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಂತೆ ಇದೆ. ಅದರ ಒಂದು ಭಾಗದ ಉದ್ದ 4 ಮೀ. ಇದ್ದು ಎದುರು ಭುಜದ ಅಂತರ 2 ಮೀ. ಆದರೆ, ಮೆಟ್ಟಿಲುಗಳ ತಳಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೇನು ?

(5) 2 ಅಡಿ ಉದ್ದವಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಚತುರ್ಭುಜದ ಆ ಬಾಹುಗಳ ಅಂತರ 1·5 ಅಡಿ ಆದರೆ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೇನು ?

(6) ತ್ರಿಭುಜಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಭೂಮಿಯ ಪಾದದ ಉದ್ದ 280′ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 3700 ಚದರ ಅಡಿಗಳಾದರೆ, ಪಾದದಿಂದ ಶಿರೋಬಿಂದುವಿಗೆ ಇರುವ ಲಂಬ ದೂರವೆಷ್ಟು ?

(7) ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದಂತಿರುವ ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 80 ಅಡಿ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 30 ಅಡಿ ಆದರೆ, ಆ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೇನು ?

(8) ನೀರು ಹಾಯಿಸುವ ಕಾಲುವೆಯೊಂದರ ಅಡ್ಡಕೊಯ್ತ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದಂತಿದೆ. ಕಾಲುವೆಯ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಅಗಲ 26 ಅಂಗುಲ, ತಳಭಾಗದ ಅಗಲ 8 ಅಂಗುಲ ಮತ್ತು ಆಳ 6 ಅಂಗುಲಗಳಾದರೆ ಅಡ್ಡಕೊಯ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಚದರಡಿಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(9) ಒಂದು ಹಳ್ಳದ ಅಡ್ಡಕೊಯ್ತವು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದಂತಿದೆ. ಅದರ ಸಮಾನಾಂತರ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 3 ಮತ್ತು 2·5 ಅಡಿಗಳಾಗಿದ್ದು, ಆಳ $1\frac{1}{4}$ ಅಡಿಯಾದರೆ, ಅಡ್ಡ ಕೊಯ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೇನು ?

(10) ಒಂದು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿರುವ ತೋಟದಲ್ಲಿ 2 ವೃತ್ತಗಳಂತೆ ಹೂವಿನ ಗಿಡಗಳ ಗುಂಪುಗಳಿವೆ. ಆ ತೋಟದ ಸಮಾನಾಂತರ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದ 4 ಮತ್ತು $5\frac{1}{2}$ ಮೀ. ಗಳೂ, ಬಾಹುಗಳ ಅಂತರ $3\frac{1}{2}$ ಮೀ. ಆಗಿದ್ದು, ವೃತ್ತಗಳ ವ್ಯಾಸ 0·4 ಮೀ. ಆಗಿದ್ದರೆ, ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೇನು ?

(11) ಒಂದು ಚೌಕಾಕೃತಿಯ ಹೂ ತೋಟದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 49 ಚದರ ಮೀ. ಆ ಚೌಕಾಕೃತಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭುಜದ ಮೇಲೂ ಆ ಭುಜದ ಉದ್ದ ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವಂತೆ ಅರ್ಧ ವೃತ್ತಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದ ಹೂವಿನ ಪಾತಿಗಳಿದ್ದರೆ, ಆ ತೋಟದ ಸುತ್ತಳತೆಯೇನು ?

(12) ತ್ರಿಭುಜಾಕೃತಿಯ ಒಂದು ಭೂಮಿಯ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 112, 136 ಮತ್ತು 232 ಗಜಗಳಾದರೆ, ಆ ಭೂಮಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಎಕರೆಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(13) ಒಂದು ಭೂಮಿಯ ಆಕೃತಿಯು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಂತಿದೆ. ಭೂಮಿಯ ಒಂದು ಪಾರ್ಶ್ವದ ಉದ್ದ 48 ಮೀ. ಇದ್ದು ಅದರ ವಿರುದ್ಧ ಪಾರ್ಶ್ವದ ದೂರ 8 ಮೀ. ಆದರೆ ಆ ಭೂಮಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೇನು ?

(14) ಒಂದು ಸೈಕಲ್ ಚಕ್ರದ ಕಬ್ಬಿಣದ ಪಟ್ಟಿಯ ವ್ಯಾಸ 2′ ಮತ್ತು ದಪ್ಪ 2″ ಆದರೆ ಆ ಪಟ್ಟಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೇನು ?

(15) 4 ಅಡಿ ವ್ಯಾಸವುಳ್ಳ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಬಾವಿಯು ಆವರಿಸಿರುವ ಜಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೇನು ?

(16) 5 ಅಡಿ ವ್ಯಾಸವುಳ್ಳ ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಚದರ ಗಜಗಳಿವೆ?

(17) ಒಂದು ಎಕರೆ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವುಳ್ಳ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಜಮೀನಿನ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟು?

(18) ಒಂದು ಚೌಕಾಕಾರದ ಬಾಳೆಯ ತೋಟದ ಸುತ್ತಳತೆ 400 ಮೀಟರ್ ಗಳಾದರೆ ಆ ತೋಟದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೇನು ?

(19) ಎರಡು ಏಕ ಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳ ವ್ಯಾಸಗಳು 10′ ಮತ್ತು 15′ ಗಳಾದರೆ ಅವೆರಡರ ಮಧ್ಯೆ ಇರುವ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೇನು?

(20) ಉಂಗುರಾಕಾರದ ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ ಹೊರ ಮತ್ತು ಒಳ ವೃತ್ತಗಳ ವ್ಯಾಸವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 8′ ಮತ್ತು 4′ ಗಳಾದರೆ ಆ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೇನು?

(21) ಎಕರೆಗೆ 5,000 ರೂ. ನಂತೆ, 270 ರಾಡ್ ಪಾದದ ಉದ್ದವನ್ನೂ 64 ರಾಡ್ ಎತ್ತರವನ್ನೂ ಉಳ್ಳ ತ್ರಿಭುಜಾಕೃತಿಯ ಪ್ರದೇಶದ ಬೆಲೆ ಏನು ?

(1 ಎಕರೆ = 160 ಚ. ರಾಡ್‌ಗಳು)

ಅಧ್ಯಾಯ 3

ಅನಿಶ್ಚಿತಾಕೃತಿಯ ಪ್ರದೇಶಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳು

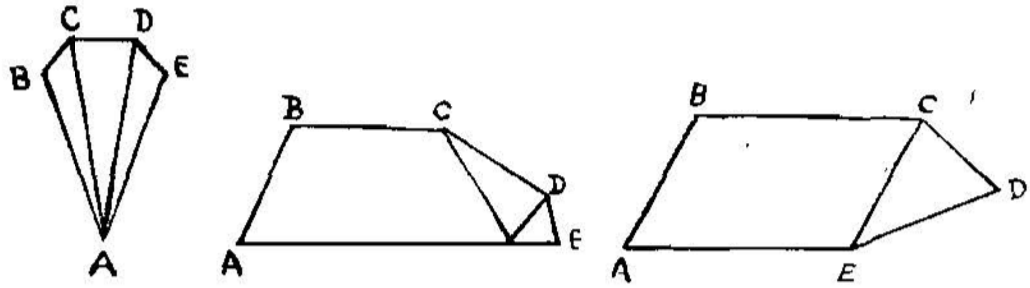
ಹಿಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಿಶ್ಚಿತಾಕೃತಿಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ರೀತಿಯನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸಲಾಯಿತು. ಈಗ ಅನಿಶ್ಚಿತಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ಕುರಿತ ಕ್ರಮವನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

ಇಲ್ಲಿ, ನಾವು ಅನಿಶ್ಚಿತಾಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ ಮುಖ್ಯವಾದ ಎರಡು ಬಗೆಗಳಾದ (1) ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಮೇರೆ ಹೊಂದಿರುವವು ಮತ್ತು (2) ಒಂದು ಭಾಗವು ವಕ್ರರೇಖೆಯಿಂದಲೂ, 3 ಭಾಗಗಳು ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಂದಲೂ ಆವೃತ್ತವಾದ ಪ್ರದೇಶಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಅಭ್ಯಸಿಸುತ್ತೇವೆ.

3.1 ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಮೇರೆ ಹೊಂದಿರುವ ಅನಿಶ್ಚಿತಾಕೃತಿಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಬಗೆ

ಇಲ್ಲಿ, ಒಂದು ಜಾಗದ ಆಕೃತಿಯು ಅನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿದ್ದಾಗ, ಆ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿರುವ ನಿಶ್ಚಿತ ಆಕೃತಿಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವಿಂಗಡಿಸಬೇಕು. ಅನಂತರ ಆ ಆಕೃತಿಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಪಡೆದರೆ ದತ್ತ ಅನಿಶ್ಚಿತಾಕೃತಿಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಬರುತ್ತದೆ.
ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ವಿಭಜಿಸಬಹುದಾದ ರೀತಿಗೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಪಂಚ ಭುಜಾಕೃತಿಗಳ ವಿಭಜನೆ



ಚಿತ್ರ 10

3 ತ್ರಿಭುಜಗಳು — 1 ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ + 2 ತ್ರಿಭುಜಗಳು — 1 ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ + 1 ತ್ರಿಭುಜ

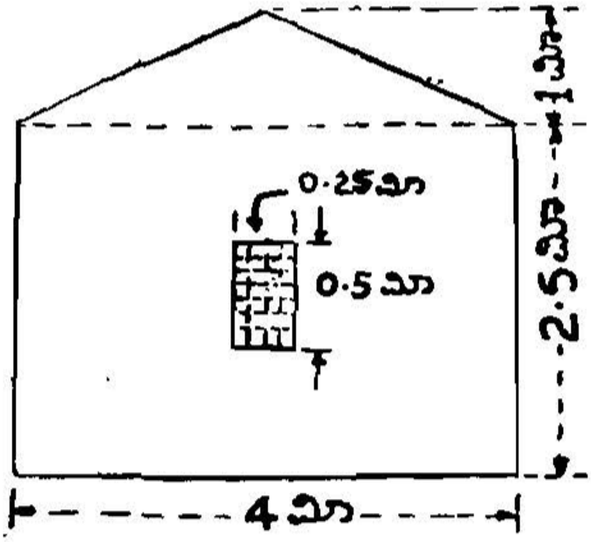
ಟಿಪ್ಪಣಿ : ಸಮಬಾಹು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= \frac{1}{2} a \times h \times n$. $a =$ ಭುಜ; $h =$ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಭುಜಗಳಿಗೆ ಇರುವ ಲಂಬದೂರ; $n =$ ಭುಜಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ.

$\therefore$ ಸಮಬಾಹು ಷಟ್ಕೋಣಾಕೃತಿಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= \frac{1}{2} a \times h \times n$

$$= \frac{1}{2} a \times \frac{\sqrt{3}}{2} a \times 6 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2.$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು:

(1) ಒಂದು ಮನೆಯ ಪಾರ್ಶ್ವ ನೋಟವು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತಿದೆ. ಆ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿ 0·5 ಮೀ. ಉದ್ದ ಮತ್ತು 0·25 ಮೀ. ಅಗಲದ ಕಿಟಕಿ ಇದ್ದು, ಉಳಿದ ಅಳತೆಗಳು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ನಮೂದಿಸಿರುವಂತೆ ಇದ್ದರೆ ಕಿಟಕಿಯನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೇನು?



ಚಿತ್ರ 11

ಚಿತ್ರವನ್ನು ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ ಮತ್ತು ಒಂದು ಆಯದಂತೆ ವಿಭಜಿಸಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ, ತ್ರಿಭುಜದ ಎತ್ತರ = 1 ಮೀ.,

ಪಾದದ ಉದ್ದ = 4 ಮೀ.

$\therefore$ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2}$ (ಪಾದ) $\times$ ಎತ್ತರ

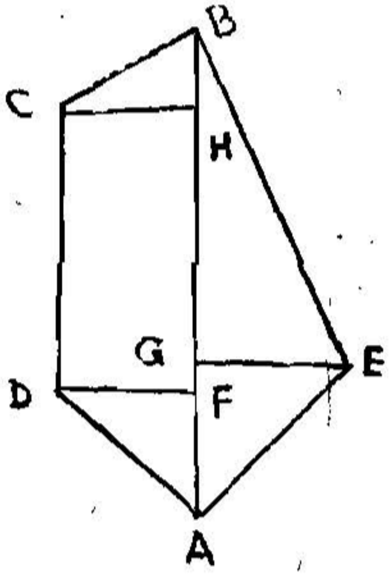
$= \frac{1}{2}(4) \times 1 = 2$ ಚ. ಮೀ.

ಆಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ಉದ್ದ $\times$ ಅಗಲ $= 2·5 \times 4 = 10$ ಚ.ಮೀ. ಕಿಟಕಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 0·5 \times 0·25 = 0·125$ ಚ. ಮೀ.

$\therefore$ ಕಿಟಕಿಯನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ಆಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ − ಕಿಟಕಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= 2 + 10 - 0·125 = 11·875$ ಚ. ಮೀ.



ಚಿತ್ರ 12

ABCDE ಎಂಬ ಪ್ರದೇಶವನ್ನು AFD, AGE, CDFH, BGE ಮತ್ತು BHC ಎಂಬ ಆಕೃತಿಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿದೆ. ಆ ಪ್ರದೇಶದ ಅಳತೆಗಳು ಈ ರೀತಿ ಇವೆ: AF = 8 ಮೀ. AG = 9 ಮೀ. AH = 20 ಮೀ. AB = 28 ಮೀ. FD = 6 ಮೀ. GE = 4 ಮೀ, HC = 10 ಮೀ. ಹಾಗಾದರೆ ABCDE ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ವೇನು ?

ಇಲ್ಲಿ AF = 8 ಮೀ. HF = AB − AF = 28 − 8 = 20 ಮೀ.

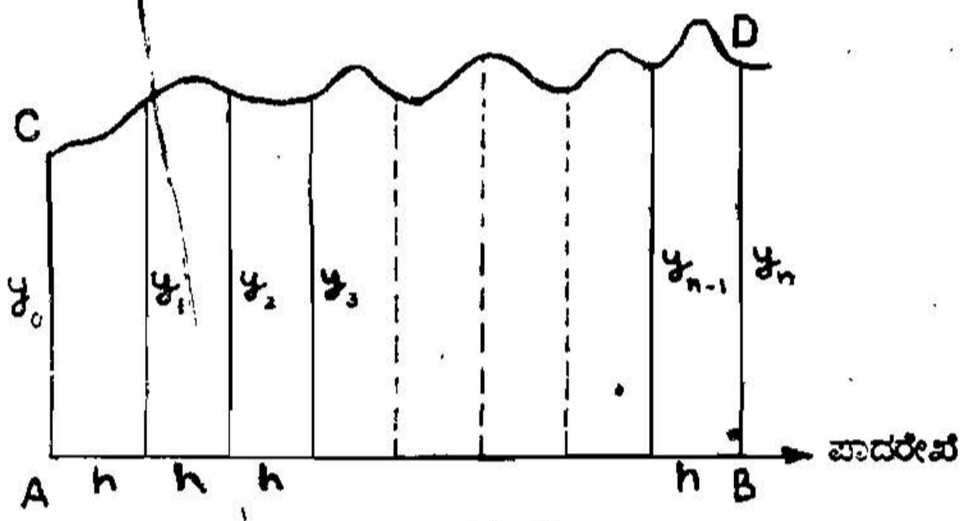
HB = AB − AH = 28 − 20 = 8 ಮೀ, BG = 28 − 9 = 19 ಮೀ

ಈಗ, ತ್ರಿಭುಜ AFD ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ	$= \frac{1}{2}(AF) \times FD$	
	$= \frac{1}{2}(8) \times 6 =$	24 ಚ. ಮೀ.
△ AGE ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ	$= \frac{1}{2}(AG) \times GE$	
	$= \frac{1}{2}(9) \times 4 =$	18 ಚ. ಮೀ.
△ BGE ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ	$= \frac{1}{2}(BG) \times GE$	
	$= \frac{1}{2} \times 19 \times 4 =$	38 ಚ. ಮೀ.
△ BHC ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ	$= \frac{1}{2}(BH) \times HC$	
	$= \frac{1}{2} \times 8 \times 10 =$	40 ಚ. ಮೀ.
ಟ್ರಾಪಿಜ್ಯ FDHC ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ	$= \frac{1}{2}(FD + HC) \times HF$	
	$= \frac{1}{2}(6 + 10) \times 20 =$	160 ಚ. ಮೀ.
∴ ABCDE ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ =		280 ಚ. ಮೀ.

3.2 3 ಭಾಗಗಳು ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಂದಲೂ ಮತ್ತು ಒಂದು ಭಾಗವು ವಕ್ರರೇಖೆಯಿಂದಲೂ ಆವೃತವಾದ ಆಕೃತಿಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ರೀತಿ :

ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ 3 ಭಾಗಗಳು ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಂದ ಆವೃತವಾಗಿದ್ದು. ಒಂದು ಭಾಗವು ವಕ್ರರೇಖೆಯಿಂದ ಆವೃತವಾಗಿದ್ದಾಗ ಆ ಪ್ರದೇಶದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು (ಅ) **ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ನಿಯಮ** ಇಲ್ಲವೇ (ಆ) **ಸಿಂಪ್ಸನ್ನನ ನಿಯಮ** ಎಂಬೆರಡು ಮುಖ್ಯ ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ.

(ಅ) **ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ನಿಯಮ (Traphezoidal rule)**



ಚಿತ್ರ 13

ACDB ಎಂಬುದು ಈಗ ನಾವು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿರುವ ಅನಿಶ್ಚಿತಾಕೃತಿಯೆಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. AB ಯನ್ನು **ಪಾದರೇಖೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

AB ಪಾದರೇಖೆಯನ್ನು n ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ ಅನಂತರ ಪ್ರತಿ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲೂ ವಕ್ರರೇಖೆ CD ಯನ್ನು ಮುಟ್ಟುವಂತೆ $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_n$ ಭುಜಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬೇಕು. ಇದರಿಂದ ABCD ಚಿತ್ರವನ್ನು (ಸುಮಾರಾಗಿ) ಅನೇಕ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯಗಳಂತೆ ವಿಂಗಡಿಸಿದಂತೆ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ABCD ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು. ಈ ಎಲ್ಲಾ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯಗಳ ಒಟ್ಟು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

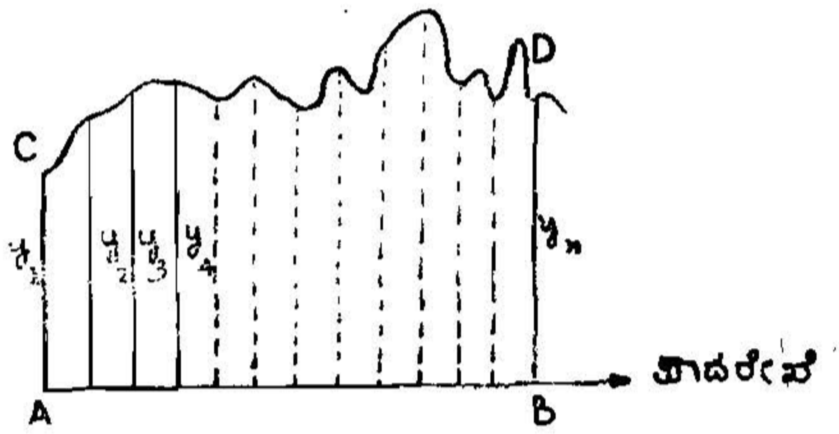
ಪಾದರೇಖೆಯ ಸಮಭಾಗಗಳ ಉದ್ದ 'h' ಆದರೆ,

$$\text{ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ} = \tfrac{1}{2} h (y_0 + y_1) + \tfrac{1}{2} h (y_1 + y_2) + \ldots\ldots + \tfrac{1}{2} h (y_{n-1} + y_n)$$

ಅಥವಾ $\boxed{\text{ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ} = h[\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots + y_{n-1}]}$

(ಆ) ಸಿಂಪ್ಸನ್ನನ ನಿಯಮ (Simpson's rule)

ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳನ್ನು ನಿಕರವಾಗಿ ತಿಳಿಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 14

ಇಲ್ಲಿ ಪಾದರೇಖೆಯನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವಾಗ 3 ಮುಖ್ಯ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸಬೇಕು ;

(1) ಪಾದರೇಖೆಯನ್ನು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಬೇಕು ;

(2) ಸಮಭಾಗಗಳ ಮೊತ್ತ ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಬೇಕು ;

(3) ಪ್ರತಿ ವಿಭಜನಾ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಭುಜಗಳ ಮೊತ್ತ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಬೇಕು.

ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದ ಮೂರು ನಿಯಮಗಳನ್ನೂ ಕಡ್ಡಾಯವಾಗಿ ಪಾಲಿಸಬೇಕು. ಹಾಗೆ ಪಾಲಿಸದಿದ್ದರೆ ಉಂಟಾಗುವ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳಲ್ಲಿ ಸಿಂಪ್ಸನ್ನನ ನಿಯಮವನ್ನು ಬಳಸುವ ರೀತಿಗಳೂ ಇವೆ. ಆದರೆ ಅವುಗಳ ಚರ್ಚೆ ಈ ಪುಸ್ತಕದ ವ್ಯಾಪ್ತಿಗೆ ಮೀರಿದ ವಿಷಯ.

ಮೇಲೆ ಹೇಳಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪಾದರೇಖೆಯನ್ನು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ (ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುವಂತೆ) ವಿಂಗಡಿಸಿ ಭುಜಗಳನ್ನು ಎಳೆದ ಬಳಿಕ ಆ ಭುಜಗಳನ್ನು ಈ ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೆಸರಿಸಬೇಕು :

ಮೊದಲನೆಯ ಮತ್ತು ಕಡೆಯ ಭುಜಗಳನ್ನು **ಆದ್ಯಂತ ಭುಜಗಳು,**

2, 4, 6,.......ನೇ ಭುಜಗಳನ್ನು **ಸಮ ಭುಜಗಳು,**

3, 5, 7,.......ನೇ ಭುಜಗಳನ್ನು **ಬೆಸ ಭುಜಗಳು** ಎನ್ನಬೇಕು.

ಪ್ರತಿ ಸಮಭಾಗದ ಅಗಲವೂ 'h' ಆದರೆ,

$$\text{ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ} = \frac{\text{ಸಮಭಾಗಗಳ ಅಗಲ}}{3} [\text{ಆದ್ಯಂತ ಭುಜಗಳ ಮೊತ್ತ} + 4\,(\text{ಸಮ ಭುಜಗಳ ಮೊತ್ತ}) + 2\,(\text{ಬೆಸ ಭುಜಗಳ ಮೊತ್ತ})]$$

$$= \frac{h}{3} [(y_1 + y_n) + 4\,(y_2 + y_4 + \ldots) + 2\,(y_3 + y_5 + \ldots)]$$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ ಒಂದು ಭಾಗವು ನದೀ ದಡದಿಂದಲೂ, ಮತ್ತೊಂದು ಭಾಗವು 24 ಮೀ. ಉದ್ದದ ನೇರ ರೈಲು ಮಾರ್ಗದಿಂದಲೂ, ಉಳಿದ ಇನ್ನೆರಡು ಭಾಗಗಳು 2 ಮೀ. ಮತ್ತು 1·8 ಮೀ. ಉದ್ದದ ನೇರವಾದ ಬೇಲಿಗಳಿಂದಲೂ ಆವೃತವಾಗಿವೆ. ಆ ರೈಲು ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ, ಪ್ರತಿ ಬಿಂದುವಿನಿಂದಲೂ ನದೀ ದಡಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಭುಜಗಳ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕೆಳಕಂಡ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ರೈಲು ಮಾರ್ಗದ ಒಂದು ಕಡೆಯಿಂದ ದೂರದ ಅಳತೆಗಳು (ಮೀ. ಗಳಲ್ಲಿ)	0	4	8	12	16	20	24
ಭುಜಗಳ ಅಳತೆ (ಮೀ. ಗಳಲ್ಲಿ)	2	3·4	6·3	5·4	4·8	5	1·8

ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಪ್ರದೇಶದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವೇನು?

(1) ಟ್ರಾಪಿಜ್ಯ ನಿಯಮದಂತೆ:

$$\text{ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ} = h\,[\tfrac{1}{2}(y_0 + y_n) + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots y_{n-1}]$$

ಇಲ್ಲಿ, $h = 4$ ಮೀ., $y_0 = 2$ ಮೀ., $y_n = y_6 = 1\cdot8$ ಮೀ.,

$y_1 = 3\cdot4$, $y_2 = 6\cdot3$, $y_3 = 5\cdot4$, $y_4 = 4\cdot8$, $y_5 = 5$

$\therefore$ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= 4\,[\tfrac{1}{2}(2 + 1\cdot8) + 3\cdot4 + 6\cdot3 + 5\cdot4 + 4\cdot8 + 5]$

$= 4\,[1\cdot9 + 3\cdot4 + 6\cdot3 + 5\cdot4 + 4\cdot8 + 5]$

$= 4\,[26\cdot8]$

$= 107\cdot2$ ಚ.ಮೀ.

(2) ಸಿಂಪ್ಸನ್ನನ ನಿಯಮದಂತೆ:

ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= \dfrac{h}{3}$ [ಆದ್ಯಂತ ಭುಜಗಳ ಮೊತ್ತ $+ 4$ (ಸಮ ಭುಜಗಳ ಮೊತ್ತ) $+ 2$ (ಬೆಸ ಭುಜಗಳ ಮೊತ್ತ)]

$$= \frac{4}{3}\,[(2 + 1\cdot8) + 4\,(3\cdot4 + 5\cdot4 + 5) + 2\,(6\cdot3 + 4\cdot8)]$$

$$= \frac{4}{3}\,[3\cdot8 + 4\,(13\cdot8) + 2\,(11\cdot1)]$$

$$= \frac{4}{3}\,[3\cdot8 + 55\cdot2 + 22\cdot2]$$

$$= \frac{4}{3}\,[81\cdot2]$$

$= 108\cdot26$ ಚ. ಮೀ. (ಸುಮಾರಾಗಿ)

ಟಿಪ್ಪಣಿ: ಈ ಲೆಕ್ಕದಿಂದ, ಎರಡು ನಿಯಮಗಳೂ (ಸುಮಾರಾಗಿ) ಒಂದೇ ಉತ್ತರವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತವೆ ಎಂಬುದು ತಿಳಿದುಬರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಸಿಂಪ್ಸನ್ನನ ನಿಯಮದಿಂದ ಪಡೆದ ಉತ್ತರವು, ಟ್ರಾಪಿಜಿಯ ನಿಯಮದಿಂದ ಪಡೆದ ಉತ್ತರಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ನಿಕರವಾಗಿರುತ್ತದೆಂಬುದು ಗಮನಾರ್ಹ.

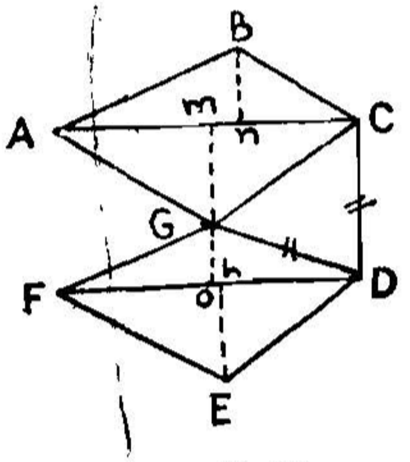
ಅಭ್ಯಾಸ 3

(1) ಸಮಬಾಹು ಷಟ್ಕೋನಾಕೃತಿಯ ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 10 ಅಡಿಗಳಾದರೆ, ಆ ಆಕೃತಿಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವೇನು?

(2) ಸಮಬಾಹು ಅಷ್ಟಕೋನಾಕೃತಿಯ ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 5 ಅಡಿಗಳಾದರೆ, ಆ ಆಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೇನು?

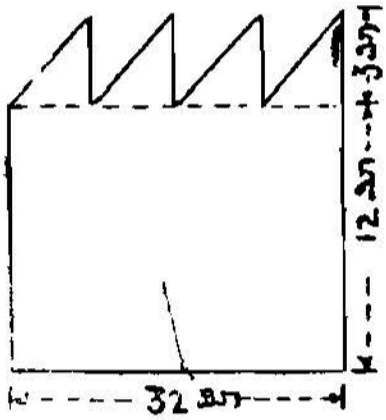
(3) ಸಮಬಾಹು ಪಂಚ ಭುಜಾಕೃತಿಯ ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 3 ಅಂಗುಲಗಳಾದರೆ, ಆ ಆಕೃತಿಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಚದರ ಸೆಂ. ಮೀ. ಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(4) ಚೌಕಾಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರದೇಶದ ಒಳಗೆ ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ಷಟ್ಕೋನಾಕೃತಿಯ ಬೇಲಿ ಇದೆ. ಆ ಬೇಲಿಯ ಬೆಲೆ ಅಡಿಗೆ $2\frac{1}{4}$ ರೂ. ನಂತೆ ಒಟ್ಟು 1,800 ರೂ. ಗಳು. ಷಟ್ಕೋನಾಕೃತಿಯ ಒಳಗಿರುವ ಪ್ರದೇಶಕ್ಕೆ ಚದರ ಗಜಕ್ಕೆ 8 ರೂ. ನಂತೆ ಡಾಂಬರು (ಟಾರು) ಹಾಕಲು ಆಗುವ ಒಟ್ಟು ಖರ್ಚು ಎಷ್ಟು?



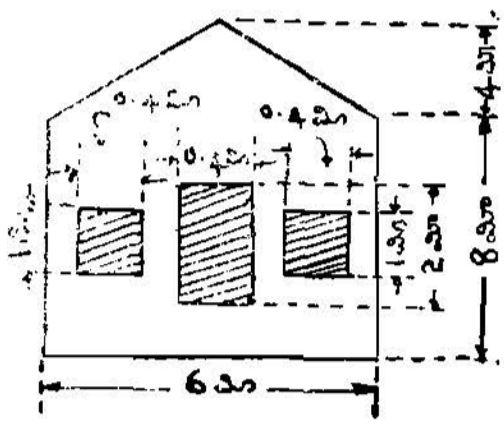
ಚಿತ್ರ 15

(5) ಪಕ್ಕದ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿನ ಅಳತೆಗಳು ಈ ರೀತಿ ಇವೆ: $AC = 10''$, $FD = 11''$, $GC = 6''$, $Gm = 3''$, $Bn = 1\frac{1}{2}''$, $Go = 1\frac{1}{4}$ $Eh = 1\frac{3}{4}''$. $DG = 3'$, ಮತ್ತು $CD = 3''$. ಹಾಗಾದರೆ ABCDEFG ಆಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೇನು?



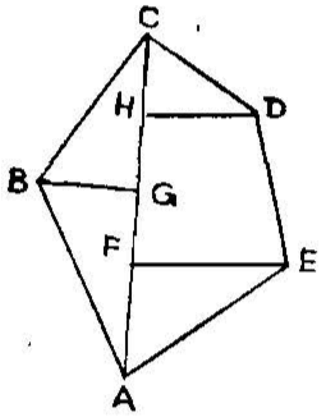
ಚಿತ್ರ 16

(6) ಒಂದು ಕಾರ್ಖಾನೆಯ ಪಕ್ಕದ ನೋಟವನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ರಚಿಸಬಹುದಾದರೆ, ಆ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.



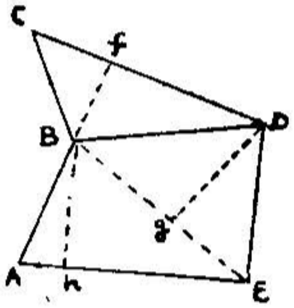
ಚಿತ್ರ 17

(7) ಒಂದು ತೋಟವು ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಂತೆ ಇದೆ. ಆ ತೋಟದ ಒಳಗಡೆ ಚಿತ್ರಿಸಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ 3 ಜಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಹುಲ್ಲು ಬೆಳೆಸಿದ್ದರೆ ಆ ತೋಟದ ಉಳಿದ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೇನು?



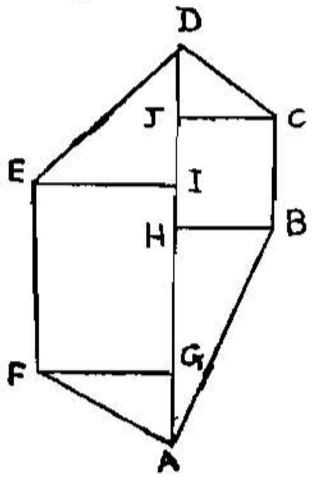
ಚಿತ್ರ 18

(8) ಒಂದು ಜಮೀನಿನ ಕರಡು ನಕ್ಷೆಯು ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಂತಿದೆ. ಆ ಜಮೀನಿನ ಅಳತೆಗಳು AC = 50 ಮೀ., AF=18 ಮೀ., AG=26 ಮೀ., AH=42 ಮೀ., FE=24 ಮೀ., BG=14 ಮೀ., HD= 17 ಮೀ., ಆದರೆ ಆ ಜಮೀನಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೇನು? ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಎಕರೆಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ (1 ಚ. ಮೀ. = 1·196 ಚ. ಗಜ).



ಚಿತ್ರ 19

(9) ಒಂದು ಬಯಲಿನ ನಕ್ಷೆಯು ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಂತೆ ಇದೆ. ಆದರ ಅಳತೆಗಳು AE= 6 ಮೀ., BE= 18 ಮೀ., CD = 7 ಮೀ., B*f* =2 ಮೀ., D*g* = 3 ಮೀ., B*h* = 2·5 ಮೀ. ಆದರೆ ಆ ಕ್ಷೇತ್ರದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೇನು?



ಚಿತ್ರ 20

(10) ಒಂದು ಜಮೀನಿನ ಕರಡು ನಕ್ಷೆಯು ಪಕ್ಕದ ಚಿತ್ರದಂತೆ ಇದೆ. ಅಳತೆಗಳು AD=68 ಮೀ., AG=12 ಮೀ., AH = 36 ಮೀ., AI = 42 ಮೀ., AJ= 54 ಮೀ., GF = 16 ಮೀ., IE = 20 ಮೀ., HB = 10 ಮೀ., JC= 8 ಮೀ. ಆದರೆ ಜಮೀನಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಎಕರೆಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಕೆಳಗಿನ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಸಿಂಪ್ಸನ್ನನ ನಿಯಮ ಮತ್ತು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ನಿಯಮಗಳಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(11) ಒಂದು ಜಮೀನಿನ ನೇರವಾದ ಭಾಗದಿಂದ ವಕ್ರವಾದ ಭಾಗಕ್ಕೆ ಪ್ರತಿ 15 ಮೀ.ಗೆ ಒಂದರಂತೆ ಎಳೆದಿರುವ ಲಂಬಗಳ ಉದ್ದ ಈ ರೀತಿ ಇವೆ. 2 ಮೀ., 8·25 ಮೀ., 12·1 ಮೀ., 15 ಮೀ., 22 ಮೀ, 38 ಮೀ., 47 ಮೀ., 58·2 ಮೀ., 29·5 ಮೀ., 13·5 ಮೀ., 16 ಮೀ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಜಮೀನಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(12) ಒಂದು ನದಿಯ ದಡಕ್ಕೂ ಮತ್ತು ಸರ್ವೆ ರೇಖೆಗೂ ಇರುವ ಅಂತರ 0, 3, 8, 10·2, 9·3, 4·5, ಮತ್ತು 12 ಮೀಟರ್‌ಗಳಾಗಿದ್ದು, ಪ್ರತಿ ಭುಜಗಳ ನಡುವಣ ಅಂತರ 10 ಮೀಟರ್ ಆದರೆ ನದಿಯ ದಡ ಮತ್ತು ಸರ್ವೆ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವಣ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೇನು ?

(13) ಒಂದು ಕಾಲುವೆಯ ಒಂದು ದಡದಿಂದ ಇನ್ನೊಂದು ದಡದ ಮಧ್ಯೆ ಇರುವ ಆಳಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಪಟ್ಟಿಮಾಡಿದೆ :

...ಡದಿಂದ ಇರುವ ದೂರ (ಸೆಂ. ಮೀ. ಗಳಲ್ಲಿ)	0	60	120	180	240	300	360	420	480	540	600
ಆಳ (ಸೆಂ. ಮೀ. ಗಳಲ್ಲಿ)	0	75	105	135	150	125	105	85	65	15	0

ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೇನು ?

(14) ಒಂದು ನೇರವಾದ ರೈಲ್ವೆ ಹಳಿಯಿಂದ ಒಂದು ನದಿಯ ದಡಕ್ಕೆ 20 ಮೀ. ಗಳ ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ. ಲಂಬಗಳ ಉದ್ದ 3, 5, 8, 12·3, 20, 14·8 ಮೀ. ಮತ್ತು 7 ಮೀಟರುಗಳಾದರೆ, ನದಿಯ ದಡಕ್ಕೂ ರೈಲ್ವೆ ಹಳಿಗೂ ಮಧ್ಯೆ ಇರುವ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೇನು ?

(15) ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ ಒಂದು ಭಾಗವು ವಕ್ರರೇಖೆಯಿಂದಲೂ ಉಳಿದ ಮೂರು ಭಾಗಗಳು ಸರಳರೇಖೆಗಳಿಂದಲೂ ಆವೃತವಾಗಿದೆ. ಪಾದರೇಖೆಯ ಉದ್ದ 200 ಮೀಟರ್‌ಗಳಾಗಿದ್ದು, ಇನ್ನುಳಿದ ಭಾಗಗಳ ಉದ್ದ 120 ಮತ್ತು 150 ಮೀಟರುಗಳಾಗಿವೆ. ಪಾದ ರೇಖೆಯನ್ನು 5 ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿ ಪ್ರತಿ ವಿಭಜನಾ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲೂ ಭುಜಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. ಈ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 120, 135, 215, 115 ಮೀಟರ್‌ಗಳಾದರೆ, ಆ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಎಕರೆಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

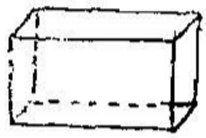
(16) ಒಂದು ಪ್ರದೇಶದ ಪಾದರೇಖೆಯ ಉದ್ದ 600 ಗಜಗಳಾಗಿದ್ದು ಪಾರ್ಶ್ವಗಳ ಉದ್ದ 140 ಗಜ ಮತ್ತು 180 ಗಜಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಉಳಿದಿರುವ ಭಾಗವು ವಕ್ರ ರೇಖೆಯಂತೆ ಇದೆ. ಪಾದರೇಖೆಯನ್ನು 8 ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಿದೆ ಮತ್ತು ಏಳು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದಿರುವ ಭುಜಗಳ ಉದ್ದ 50, 55, 70, 80, 120, 105 ಮತ್ತು 60 ಗಜಗಳಾದರೆ ಆ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಎಕರೆಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ 4

ಘನವಸ್ತುಗಳ ಘನ ಪರಿಮಾಣಗಳು
(VOLUMES OF SOLIDS)

ಇದುವರೆಗೆ ನಾವು ಸಮತಲಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಮುಂತಾದವುಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಂಡೆವು. ಇನ್ನುಮುಂದೆ ನಿತ್ಯಜೀವನದಲ್ಲಿ ಬಳಸುವ ಘನವಸ್ತುಗಳ ಕ್ಷೇತ್ರಗಣಿತವನ್ನು ತಿಳಿಯೋಣ.

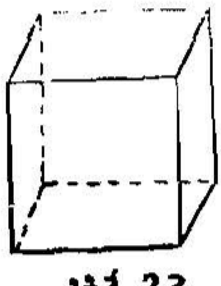
4.1 ಆಯಾಕೃತಿಯ ಘನವಸ್ತು (Rectangular Solid)



ಚಿತ್ರ 21

ಇದು ಆರು ಆಯಾಕೃತಿಗಳಿಂದ ನಿರ್ಮಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. l, b ಮತ್ತು h ಗಳು ಈ ವಸ್ತುವಿನ ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳಾದರೆ, ಆ ವಸ್ತುವಿನ ಘನಪರಿಮಾಣ $= l \times b \times h = lbh$ ಘನಮಾನಗಳು. ಆ ವಸ್ತುವಿನ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= 2\,(lb + bh + hl)$ ಚದರಮಾನಗಳು.

4.2 ಘನ (Cube)



ಚಿತ್ರ 22

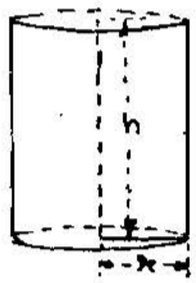
ಆಯಾಕೃತಿಯ ಘನವಸ್ತುವಿನ ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಘನ ವಸ್ತುವಿಗೆ **ಘನ** ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಇಲ್ಲಿ, $l = b = h = a$.

$\therefore$ ಘನಪರಿಮಾಣ $= a^3$ ಘನಮಾನಗಳು

ಮೇಲ್ಮೈ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= 6a^2$ ಚದರಮಾನಗಳು.

4.3 ಸಿಲಿಂಡರ್



ಚಿತ್ರ 23

ಆಯಾಕೃತಿಯ ಒಂದು ಭುಜವನ್ನು ಅಕ್ಷವನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಇನ್ನೊಂದು ಭುಜವನ್ನು ಅದರ ಸುತ್ತ ತಿರುಗಿಸಿದರೆ ಉಂಟಾಗುವ ಘನಾಕೃತಿಗೆ **ಸಿಲಿಂಡರ್** ಎಂದು ಹೆಸರು.

ದುಂಡಗಿರುವ ನಾಣ್ಯಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಮೇಲೆ ಒಂದರಂತೆ ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಸಿಲಿಂಡರ್‌ನ ರೂಪ ತಳೆಯುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಿಲಿಂಡರನ್ನು ಒಂದೇ ಮಾನದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಮೇಲೆ ಒಂದರಂತೆ ಇಡುವುದರಿಂದ ಉಂಟಾದ ಆಕೃತಿ ಎಂದೂ ಭಾವಿಸಬಹುದು.

'h' ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಎತ್ತರವೂ, r ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವೂ ಆದರೆ,

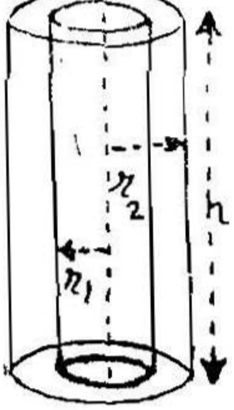
ಅದರ ಘನಪರಿಮಾಣ $= \pi r^2 h$ ಘನಮಾನಗಳು ಮತ್ತು

ವಕ್ರಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= 2\pi rh$ ಚದರ ಮಾನಗಳು.

ಘನ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಒಟ್ಟು ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r(r + h)$ ಚದರಮಾನಗಳು

4.4 ಕೊಳವೆ (Hollow Cylinder)



ಚಿತ್ರ 24

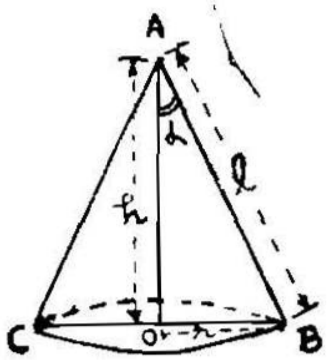
ಕೊಳವೆಯ ಘನಪರಿಮಾಣ $= \pi(r_2^2 - r_1^2)h$ ಘನ. ಇಲ್ಲಿ, 'r_2' ಹೊರಮುಖದ ತ್ರಿಜ್ಯವೂ, 'r_1' ಒಳಮುಖದ ತ್ರಿಜ್ಯವೂ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಕೊಳವೆಯ ವಕ್ರಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= 2\pi(r_2 + r_1)h$

4.5 ಶಂಕು (Cone)

ತ್ರಿಭುಜವು ತನ್ನ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಭುಜವನ್ನು ಅಕ್ಷವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ತಿರುಗಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಘನಾಕೃತಿಗೆ **ಶಂಕು** ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶಂಕುವು, AOB ತ್ರಿಭುಜವು AO ಭುಜವನ್ನು ಅಕ್ಷವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು AB ಭುಜವು ಸುತ್ತಿದುದರ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿ ಜನಿಸಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 25

ಆದ್ದರಿಂದ AB ಗೆ **ಜನಕರೇಖೆ** ಎಂದೂ A ಬಿಂದುವನ್ನು **ಶೃಂಗಬಿಂದುವೆಂದೂ** ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. AB, ಶಂಕುವಿನ **ಓರೆ ಎತ್ತರ**ವಾಗಿದೆ. AO ವನ್ನು **ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

$O\hat{A}B = \alpha$ ವನ್ನು ಶಂಕುವಿನ **ಅರ್ಧ ಶೃಂಗ ಕೋನ** ಎಂದೂ, OB ಅನ್ನು ಶಂಕುವಿನ **ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ**ವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಶಂಕುವಿನ ಘನ ಪರಿಮಾಣ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ಘನ ಮಾನಗಳು

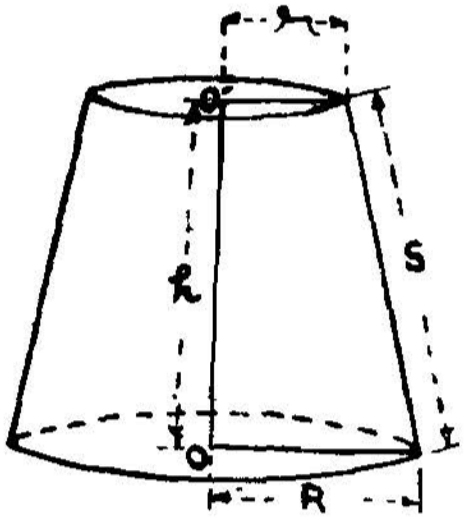
($h =$ ಎತ್ತರ, $r =$ ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ)

ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= \pi rl$ ಚದರಮಾನಗಳು ($l =$ **ಓರೆ ಎತ್ತರ**)

∴ ಶಂಕುವಿನ ಪೂರ್ಣ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= \pi rl + \pi r^2$

$= \pi r (l + r)$ ಚದರಮಾನಗಳು

4.6 ಶಂಕುವಿನ ಪೃಷ್ಠ (Frustum of the cone)



ಇದು ಶಂಕುವಿನದೇ ಒಂದು ಭಾಗ. ಶಂಕುವಿನ ತಳಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ, ಶೃಂಗಬಿಂದುವಿಗಿಂತ ಮುಂಚೆ ಯಾವುದೇ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಶಂಕುವನ್ನು ಭಿನ್ನ ಮಾಡಿದರೂ, ಬರುವ ಭಾಗಕ್ಕೆ **ಶಂಕುವಿನ ಪೃಷ್ಠ** ಎಂದು ಹೆಸರು.

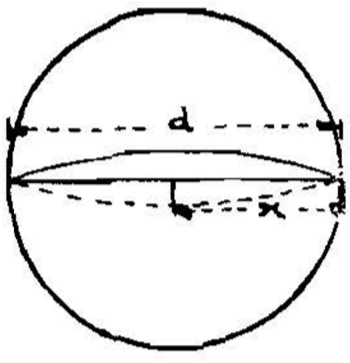
ಚಿತ್ರ 26

ಶಂಕುವಿನ ಪೃಷ್ಠದ ಘನಪರಿಮಾಣ $= \frac{1}{3}\pi h (R^2 + Rr + r^2)$ ಘನ ಮಾನಗಳು

[h = ಅದರ ಎತ್ತರ, R = ತಳಭಾಗದ ತ್ರಿಜ್ಯ, r = ಮೇಲ್ಭಾಗದ ತ್ರಿಜ್ಯ]

ಅದರ ವಕ್ರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= \pi (R + r) s$ [s = ಅದರ ಓರೆ ಎತ್ತರ]

∴ ಪೂರ್ಣ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= \pi (R + r) S + \pi (R^2 + r^2)$



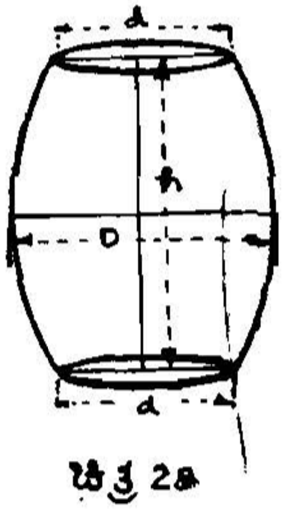
ಚಿತ್ರ 27

4.7 ಗೋಳಾಕೃತಿ (Sphere)

ಇದು ವಕ್ರ ಮೇಲ್ಮೈಯಿಂದ ಆವೃತವಾದ ಒಂದು ಘನಾಕೃತಿ. ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಮೇಲ್ಮೈಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿ ಬಿಂದುವೂ ಸಮನಾದ ಅಂತರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಗೋಳದ ಘನ ಪರಿಮಾಣ $= \frac{4}{3}\pi r^3$ (r = ತ್ರಿಜ್ಯ)

ವಕ್ರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= 4\pi r^2$



ಚಿತ್ರ 28

4.8 ಪೀಪಾಯಿ (Barrel)

ಪೀಪಾಯಿಯ ಘನ ಪರಿಮಾಣ $= \frac{\pi h}{12} (2D^2 + d^2)$

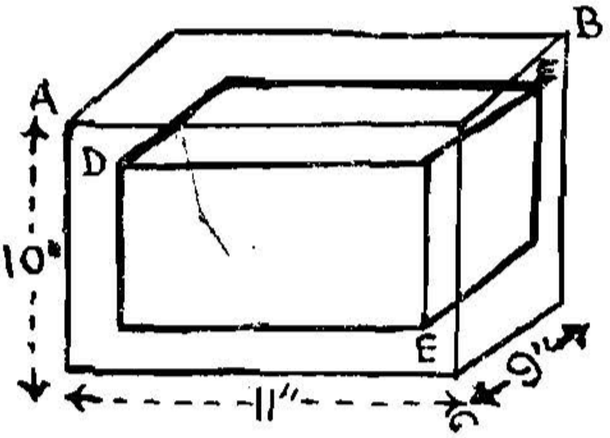
D = ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪೀಪಾಯಿನ ವ್ಯಾಸ

d = ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಪೀಪಾಯಿನ ವ್ಯಾಸ

h = ಎತ್ತರ

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ಒಂದು ಆಯಾಕಾರದ, ಮುಚ್ಚಳವಿರುವ, ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಮತ್ತು ಎತ್ತರಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 9", 11", ಮತ್ತು 10", ಇವೆ. ಆ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯನ್ನು 0·75 ಸಾಪೇಕ್ಷ ಸಾಂದ್ರತೆಯುಳ್ಳ, $1\frac{1}{2}$" ದಪ್ಪದ ಮರದಿಂದ ಮಾಡಿದ್ದರೆ, ಆ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯ ತೂಕವೇನು?



ಚಿತ್ರ 29

ಮರದ ಘನ ಪರಿಮಾಣ = ABC ಘನದ ಘನ ಪರಿಮಾಣ − DEF ನ ಘನ ಪರಿಮಾಣ

$= [(9 \times 11 \times 10) - (6 \times 8 \times 7)]$ ಘನ ಅಂಗುಲ

$= 654$ ಘನ ಅಂಗುಲಗಳು.

$$\text{ಸಾಪೇಕ್ಷ ಸಾಂದ್ರತೆ} = \frac{\text{ಮರದ ಯಾವುದೇ ಘನ ಪರಿಮಾಣದ ತೂಕ}}{\text{ಅದೇ ಘನ ಪರಿಮಾಣದ ನೀರಿನ ತೂಕ}}$$

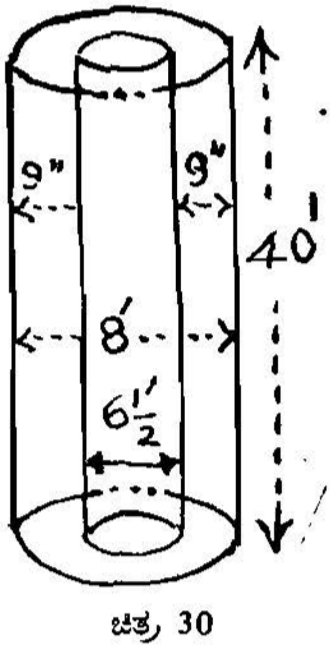
ಮತ್ತು 654 ಘನ ಅಂಗುಲ ಮರದ ತೂಕ (ನೀರಿನಲ್ಲಿ) $\Big\} = \dfrac{1000 \times 654}{1728}$ ಔನ್ಸ್‌ಗಳು

$$\therefore\ 0 \cdot 75 = \frac{\text{ಮರದ ತೂಕ} \times 1728}{1000 \times 654}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಮರದ ತೂಕ $= \dfrac{0 \cdot 75 \times 1000 \times 654}{1728}$

$= 283 \cdot 8$ ಔನ್ಸ್‌ಗಳು (ಸುಮಾರು)

(2) 40′ ಆಳದ ಒಂದು ಬಾವಿಯ ಒಳಮೈಯನ್ನು 9″ ದಪ್ಪದ ಇಟ್ಟಿಗೆಗಳಿಂದ ಭದ್ರಪಡಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಆ ಬಾವಿಯ ಒಳಮೈವ್ಯಾಸ 8 ಅಡಿಗಳು. ಹಾಗಾದರೆ, 100 ಘನ ಅಡಿ ಮಣ್ಣು ತೆಗೆಯಲು 10 ರೂ. ನಂತೆ ಬಾವಿ ತೋಡಲು ಎಷ್ಟು ಖರ್ಚಾಗುತ್ತದೆ? ಹಾಗೆಯೇ 100 ಘನ ಅಡಿಗೆ 20 ರೂ. ನಂತೆ, ಇಟ್ಟಿಗೆಯಿಂದ ಒಳಮೈಯನ್ನು ಭದ್ರಪಡಿಸಲು ಆಗುವ ಖರ್ಚು ಎಷ್ಟು?



ಚಿತ್ರ 30

ಬಾವಿ ತೋಡುವಾಗ ತೆಗೆದ ಮಣ್ಣಿನ ಘನ ಪರಿಮಾಣ $= \pi r^2 h$

$3 \cdot 14 \times (4)^2 \times 40$ ಘನ ಅಡಿಗಳು

100 ಘನ ಅಡಿಗೆ 10 ರೂ. ನಂತೆ ಮಣ್ಣು ತೆಗೆಯಲು ಆದ ಒಟ್ಟು ಖರ್ಚು $= \dfrac{3 \cdot 14 \times 16 \times 40 \times 10}{100}$

$= 200$ ರೂ. 96 ಪೈ.

ಒಳಮೈ ಇಟ್ಟಿಗೆ ಕಟ್ಟಡದ ಘನಪರಿಮಾಣ $= \pi (r_1 + r_2)(r_1 - r_2)h$

ಇಲ್ಲಿ, $r_1 = 4'$, $r_2 = 3\frac{1}{4}'$ ಮತ್ತು $h = 40'$

$\therefore$ ಇಟ್ಟಿಗೆ ಕಟ್ಟಡದ ಘನ ಪರಿಮಾಣ $= 3 \cdot 14 \left(4 + \dfrac{13}{4}\right)\left(4 - \dfrac{13}{4}\right) 40$

$$= 3 \cdot 14 \times \frac{29}{4} \times \frac{3}{4} \times 40$$

100 ಘನ ಅಡಿಗೆ 20 ರೂ. ನಂತೆ ತಗಲುವ ಖರ್ಚು $= 3 \cdot 14 \times \frac{29}{4} \times \frac{3}{4}$

$$\times \frac{40}{100} \times 20$$

$$= \underline{93 \text{ ರೂ. } 04 \text{ ಪೈ.}}$$

(3) ಯಾವ ಕಾರಣದಿಂದಲೂ ತಾಮ್ರವು ನಷ್ಟವಾಗದಂತೆ, 40 ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದ, 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಗಲ ಮತ್ತು 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ದಪ್ಪ ಇರುವ ಆಯಾಕಾರದ ತಾಮ್ರದ ತಗಡಿನಿಂದ ಒಂದು ಶಂಕುವನ್ನು ಎರಕ ಹೊಯ್ದಿದೆ. ಆ ಶಂಕುವಿನ ತಳದ ವ್ಯಾಸ 25 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಅದರ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಆಯಾಕಾರದ ತಾಮ್ರದ ತಗಡಿನ ಘನಪರಿಮಾಣ = ಉದ್ದ × ಅಗಲ × ಎತ್ತರ

$$= 40 \times 7 \times 5$$

= 1400 ಘ. ಸೆಂ. ಮೀ.

ತಾಮ್ರವು ಯಾವ ಕಾರಣದಿಂದಲೂ, ನಷ್ಟವಾಗದಿರುವುದರಿಂದ, ಎರಕ ಹೊಯ್ದ ಶಂಕುವಿನ ಘನಪರಿಮಾಣ = ತಾಮ್ರದ ತಗಡಿನ ಘನ ಪರಿಮಾಣ = 1400 ಘ. ಸೆಂ.ಮೀ. ಗಳು.

ಈ, ಶಂಕುವಿನ ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ 'r' $= \frac{25}{2}$ ಸೆಂ.ಮೀ.

ಶಂಕುವಿನ ಘನ ಪರಿಮಾಣ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

ಅಂದರೆ, $1400 = \frac{1}{3} \times 3 \cdot 14 \times \frac{25}{2} \times \frac{25}{2} \times h$

$$\therefore h = \frac{1400 \times 3 \times 2 \times 2}{3 \cdot 14 \times 25 \times 25}$$

$$= \frac{16800}{1962 \cdot 5}$$

= 8·56 ಸೆಂ.ಮೀ. (ಸುಮಾರಾಗಿ)

ಅಭ್ಯಾಸ 4

(1) ಆಯಾಕಾರದ ಅಮೃತಶಿಲೆಯ ಉದ್ದ 2 ಅಡಿ 3 ಅಂಗುಲ, ಅಗಲ 1 ಅಡಿ 8 ಅಂಗುಲ ಮತ್ತು ದಪ್ಪ 6 ಅಂಗುಲ ಇದ್ದರೆ ಅದರ ಘನ ಪರಿಮಾಣ ವೆಷ್ಟು?

(2) ಬಾಲ್‌ಬೆಕ್ (Balbec) ಗೋಡೆಗಳ ಅವಶೇಷಗಳಲ್ಲಿ ಇದ್ದ ಒಂದು ಕಲ್ಲಿನ ಉದ್ದ 66 ಅಡಿ, ಅಗಲ 14 ಅಂಗುಲ ಮತ್ತು ದಪ್ಪ 12 ಅಂಗುಲ. ಹಾಗಾದರೆ ಅದರ ಘನಪರಿಮಾಣವೇನು? ಮತ್ತು ಆ ಕಲ್ಲು 1 ಘನ ಅಡಿಗೆ 180 ಪೌಂಡ್ ತೂಗಿದರೆ ಆ ಕಲ್ಲಿನ ತೂಕವೇನು?

(3) 25 ಅಡಿ ಉದ್ದ, 15 ಅಡಿ ಅಗಲ ಇರುವ ಒಂದು ಆಯಾಕಾರದ ನೀರಿನ ತೊಟ್ಟಿ 2250 ಘನ ಅಡಿ ನೀರು ಹಿಡಿಸಬೇಕಾದರೆ ಆ ತೊಟ್ಟಿಯ ಆಳ ಎಷ್ಟಿರಬೇಕು?

(4) 30 ಅಡಿ ಉದ್ದ, 24 ಅಡಿ ಅಗಲ ಮತ್ತು 18 ಅಡಿ ಎತ್ತರವಿರುವ ಕೋಣೆಯಲ್ಲಿ ಇರುವ ಗಾಳಿಯ ಪರಿಮಾಣವೇನು?

(5) 3 ಅಂಗುಲ, 4 ಅಂಗುಲ ಮತ್ತು 5 ಅಂಗುಲದ ಬಾಹುಗಳನ್ನುಳ್ಳ ಮೂರು ಸೀಸದ ಘನಗಳನ್ನು ಕರಗಿಸಿ ಒಂದು ಘನವನ್ನಾಗಿ ಎರಕ ಹೊಯ್ದಿದೆ. ಸೀಸವು ಯಾವ ಕಾರಣದಿಂದಲೂ ನಷ್ಟವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಹೊಸದಾಗಿ ಎರಕ ಹೊಯ್ದ ಘನದ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವೇನು?

(6) 9″ ಉದ್ದ, $4\frac{1}{2}$″ ಅಗಲ ಮತ್ತು 3″ ದಪ್ಪವಿರುವ ಇಟ್ಟಿಗೆಗಳಿಂದ 5″ ಎತ್ತರ, 20 ಅಡಿ ಅಗಲ ಮತ್ತು 20 ಅಡಿ ಉದ್ದದ ವೇದಿಕೆ ನಿರ್ಮಿಸಲು ಬೇಕಾಗುವ ಇಟ್ಟಿಗೆಗಳೆಷ್ಟು?

(7) ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಘನಪರಿಮಾಣ 5 ಘನ ಅಡಿಗಳು ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 3 ಅಡಿಗಳಾದರೆ, ಆ ಶಂಕುವಿನ ತಳದ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟು?

(8) ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ತಳದ ಸುತ್ತಳತೆ 22 ಅಡಿಗಳೂ ಮತ್ತು ಓರೆ ಎತ್ತರ 8 ಅಡಿಗಳೂ ಆದರೆ ಅದರ ಘನ ಪರಿಮಾಣವೆಷ್ಟು?

(9) ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ವಕ್ರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ 480 ಚ. ಸೆಂ.ಮೀ. ಗಳು ಮತ್ತು ಓರೆ ಎತ್ತರ 20 ಸೆಂ.ಮೀ. ಗಳು. ಹಾಗಾದರೆ ಅದರ ತಳದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೆಷ್ಟು?

(10) ಶಂಕುವಿನಾಕಾರದಲ್ಲಿ ರಾಗಿಯನ್ನು ರಾಶಿಹಾಕಿದೆ. ಅದರ ತಳದ ಸುತ್ತಳತೆ 25 ಅಡಿಗಳೂ ಎತ್ತರ 4 ಅಡಿಗಳೂ ಆದಾಗ ರಾಶಿಯಲ್ಲಿರುವ ರಾಗಿಯ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(11) 40 ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದ, 7 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಗಲ ಮತ್ತು 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ದಪ್ಪವಿರುವ ಒಂದು ಆಯಾಕಾರದ ಕಬ್ಬಿಣದ ತುಂಡನ್ನು ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಕರಗಿಸಿ ಶಂಕುವಿನಂತೆ ಎರಕ ಹೊಯ್ದಿದೆ. ಫಲಿತ ಶಂಕುವಿನ ತಳದ ವ್ಯಾಸ 25 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ, ಅದರ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(12) ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಪೃಷ್ಠದ ಎತ್ತರ 2 ಅಡಿ, ಮೇಲ್ಭಾಗದ ವ್ಯಾಸ 20 ಅಂಗುಲ ಮತ್ತು ತಳದ ವ್ಯಾಸ 36 ಅಂಗುಲಗಳಾದರೆ ಅದರ ಘನ ಪರಿಮಾಣವೇನು?

(13) ಒಂದು ಶಂಕುವಿನ ಪೃಷ್ಠದ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ವ್ಯಾಸ 2 ಅಡಿ ಮತ್ತು ತಳದ ವ್ಯಾಸ 4 ಅಡಿಗಳಾಗಿದ್ದು ಅದರ ಘನ ಪರಿಮಾಣ 392 ಘನ ಅಡಿಗಳಾದರೆ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(14) 18 ಅಡಿ ಎತ್ತರದ ಶಂಕುವಿನ ಪೃಷ್ಠದ ಘನ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು, ಅದರ ಅತಿ ಹೆಚ್ಚಿನ ವ್ಯಾಸ 8 ಅಡಿಗಳು ಮತ್ತು ಅತಿ ಕಡಿಮೆ ವ್ಯಾಸ 4 ಅಡಿಗಳಾದಾಗ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(15) ಒಂದು ಬಕೆಟ್‌ನ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಮತ್ತು ತಳದ ವ್ಯಾಸಗಳು 28 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು 18 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆಗಿದ್ದು ಬಕೆಟ್ಟಿನ ಆಳವು 30 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ. ಆ ಬಕೆಟ್ ಹಿಡಿಸುವ ನೀರಿನ ಪರಿಮಾಣವೆಷ್ಟು?

(16) ಒಂದು ಬಕೆಟ್‌ನ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು, ಅದರ ಓರೆ ಎತ್ತರ 38 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಭಾಗದ ವ್ಯಾಸ 20 ಸೆಂ.ಮೀ. ತಳದ ವ್ಯಾಸ 15 ಸೆಂ.ಮೀ. ಗಳಾದಾಗ, ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(17) 8 ಮೀ. ತಳದ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು 16 ಚ. ಮೀ. ವಕ್ರ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಇರುವ ಒಂದು ಸಿಲಿಂಡರನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಲು ಬೇಕಾಗುವ ಕಾಂಕ್ರೀಟ್‌ನ ಪರಿಮಾಣವೇನು?

(18) ಒಂದು ಸಿಲಿಂಡರ್ ಆಕಾರದ ತೊಟ್ಟಿಯ ಘನಪರಿಮಾಣ 5·2 ಕಿಲೋ ಲೀಟರಾಗಿದ್ದು ಅದರ ಎತ್ತರ ಮತ್ತು ವ್ಯಾಸಗಳ ಪ್ರಮಾಣ 2:1 ಆದರೆ, ಆ ತೊಟ್ಟಿಯ ಅಳತೆಗಳೇನು? [1 ಕಿಲೋ ಲೀಟರ್ = 1000 ಲೀಟರ್]

(19) ಕೊಳವೆಯಾಕಾರದ ಒಂದು ಕಣಜದ ಒಳಗಿನ ವ್ಯಾಸ 4 ಅಡಿಗಳು ಮತ್ತು ಎತ್ತರ $5\frac{1}{2}$ ಅಡಿಗಳಾದರೆ ಆ ಕಣಜದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಅಕ್ಕಿ ಹಿಡಿಸುತ್ತದೆ?

(20) ಒಂದು ಆಯಾಕಾರದ ಕಾಗದದ ಉದ್ದ 60 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಅಗಲ 20 ಸೆಂ.ಮೀ. ಗಳು. ಅದರ ಉದ್ದದಷ್ಟೇ ಎತ್ತರವಿರುವ ಕೊಳವೆಯಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಅದನ್ನು ಸುತ್ತಿದರೆ, ಉಂಟಾಗುವ ಕೊಳವೆಯ ತ್ರಿಜ್ಯವೇನು?

(21) ಒಂದು ಮರದ ಕಾಂಡವು 5 ಅಡಿ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು 30 ಅಡಿ ಎತ್ತರ ಇರುವ ಸಿಲಿಂಡರಿನಂತೆ ಇದೆ. ಅದರಲ್ಲಿರುವ ಮರದ ಘನ ಪರಿಮಾಣವೇನು?

(22) 32·5 ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದ ಮತ್ತು 1·6 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸವುಳ್ಳ ಒಂದು ತಾಮ್ರದ ತುಂಡನ್ನು ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿ 0·0625 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸದ ತಂತಿಯನ್ನು ಮಾಡಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ತಂತಿಯ ಉದ್ದವೇನು?

(23) ಒಂದು ಬಾವಿಯ ಒಳಗಿನ ವ್ಯಾಸ 5 ಅಡಿಗಳೂ ಆಳ 20 ಅಡಿಗಳೂ ಆಗಿದ್ದರೆ ತೆಗೆದು ಹಾಕಿದ ಮಣ್ಣಿನ ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(24) ಒಂದು ಕಬ್ಬಿಣದ ಕೊಳವೆಯಲ್ಲಿರುವ ರಂಧ್ರದ ವ್ಯಾಸ 3 ಸೆಂ.ಮೀ., ದಪ್ಪ 2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಮತ್ತು ಉದ್ದ 2 ಮೀ. ಒಂದು ಘನ ಸೆಂ.ಮೀ. ಕಬ್ಬಿಣದ ಬೆಲೆ 12 ಪೈಸೆಯಾದರೆ ಆ ಕೊಳವೆಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(25) 16 ಸೆಂ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಗೋಳದ ಘನ ಪರಿಮಾಣ ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಮೈ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(26) 32 ಚ. ಮೀ. ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವುಳ್ಳ ಗೋಳದ ಘನ ಪರಿಮಾಣವೆಷ್ಟು?

(27) ಯಾವ ಕಾರಣದಿಂದಲೂ ಸೀಸವು ನಷ್ಟ ಹೊಂದದಿದ್ದರೆ, 6·4 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸದ ಸೀಸದ ಗುಂಡಿನಿಂದ 6·4 ಮಿ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಎಷ್ಟು ಗುಂಡುಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಬಹುದು?

(28) ಶಾಯಿಯ ಒಂದೊಂದು ಹನಿಯೂ ಗೋಳಾಕಾರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಪ್ರತಿ ಹನಿಯ ವ್ಯಾಸವೂ 0·015 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದರೆ 8·4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದ ಮತ್ತು 1 ಸೆಂ. ಮೀ. ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಲೇಖನಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಹನಿ ಶಾಯಿ ಹಿಡಿಸುತ್ತದೆ ?

(29) 5 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸವುಳ್ಳ ಒಂದು ಕಬ್ಬಿಣದ ಗುಂಡನ್ನು *15* ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದದ ಭುಜವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ, ಅರ್ಧಭಾಗದಷ್ಟು ನೀರಿನಿಂದ ತುಂಬಿದ ಘನಾಕಾರದ ತೊಟ್ಟಿಗೆ ಹಾಕಿದರೆ, ನೀರಿನ ಮಟ್ಟ ಎಷ್ಟು ಏರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(30) ಒಂದು ಪೀಪಾಯಿಯಲ್ಲಿ ಸೀಮೆ ಎಣ್ಣೆ ಇದೆ. ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪೀಪಾಯಿಯ ವ್ಯಾಸ 0.75 ಮೀ. ಮತ್ತು ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಅದರ ವ್ಯಾಸ 0.25 ಮೀ. ಇದೆ. ಪೀಪಾಯಿಯ ಎತ್ತರ 2 ಮೀ. ಆದರೆ, ಅದರಲ್ಲಿರುವ ಸೀಮೆ ಎಣ್ಣೆಯ ಪರಿಮಾಣವೇನು?

(31) ಒಂದು ಪೀಪಾಯಿಯು 380 ಲೀ. ನೀರನ್ನು ಹಿಡಿಸುತ್ತದೆ. ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಮತ್ತು ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಅದರ ವ್ಯಾಸವು ಕ್ರಮವಾಗಿ 0·6 ಮೀ. ಮತ್ತು 0.3 ಮೀ. ಇದ್ದಾಗ, ಅದರ ಎತ್ತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(32) 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಕೊಳವೆಯಿಂದ 3 ಮೀ. ಉದ್ದ, 5 ಮೀ ಅಗಲ ಮತ್ತು $1\frac{1}{2}$ ಮೀ. ಆಳವಿರುವ ಆಯಾಕಾರದ ತೊಟ್ಟಿಗೆ, ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ *300* ಘನ ಸೆಂ.ಮೀ. ನಂತೆ ನೀರು ತುಂಬಿದರೆ, ಆ ತೊಟ್ಟಿಯು ಪೂರ್ತಿಯಾಗಿ ತುಂಬಲು ಬೇಕಾಗುವ ಕಾಲವೇನು?

(33) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಆಯಾಕೃತಿಗಳ ಘನ ಪರಿಮಾಣ ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(i) ಉದ್ದ = 3 ಸೆಂ.ಮೀ. ಅಗಲ = 5 ಸೆಂ.ಮೀ., ಎತ್ತರ = $\frac{1}{2}$ ಸೆಂ.ಮೀ.

(ii) ಉದ್ದ = $1\frac{1}{2}'$, ಅಗಲ = $2'$, ಎತ್ತರ = $3'$.

(iii) ಉದ್ದ = 0·25 ಮೀ. ಅಗಲ = 0·75 ಮೀ. ಎತ್ತರ = 4 ಸೆಂ. ಮೀ.

(iv) ಉದ್ದ = ½′, ಅಗಲ = 3′, ಎತ್ತರ = ¼″

(v) ಉದ್ದ = 3 ಗಜ, ಅಗಲ = 4 ಗಜ, ಎತ್ತರ = ½′

(34) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಶಂಕುವಿನ ಒಟ್ಟು ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲ ಮತ್ತು ಘನ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(i) ತಳದ ತ್ರಿಜ್ಯ = 5 ಸೆಂ.ಮೀ, ಎತ್ತರ = 0·5 ಮೀ.

(ii) ತಳದ ಸುತ್ತಳತೆ = 15 ಅಂಗುಲ, ಓರೆ ಎತ್ತರ = 2 ಅಡಿ.

(iii) ಎತ್ತರ = 2 ಅಡಿ, ಓರೆ ಎತ್ತರ = 5 ಅಡಿ.

(iv) ಎತ್ತರ = 0·5 ಮೀ., ತಳದ ಸುತ್ತಳತೆ = 20 ಸೆಂ.ಮೀ.

(v) ತಳದ ವ್ಯಾಸ = 3 ಅಡಿ, ಓರೆ ಎತ್ತರ = 7 ಅಡಿ.

(35) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಿಲಿಂಡರಿನ ಒಟ್ಟು ಕ್ಷೇತ್ರ ಫಲ ಮತ್ತು ಘನಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(i) ಎತ್ತರ = 2 ಅಡಿ, ತ್ರಿಜ್ಯ = 0·25 ಅಡಿ.

(ii) ಎತ್ತರ = ½ ಮೀ., ವ್ಯಾಸ = 1 ಸೆಂ. ಮೀ.

(36) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ ಪೀಪಾಯಿಗಳ ಘನ ಪರಿಮಾಣ ಗಳೇನು ?

(i) D = 0·75 ಮೀ., d = 0·25 ಮೀ. h = 5 ಮೀ.

(ii) D = 7″, d = 3″, h = 2′ 3″

(iii) D = 25 ಸೆಂ.ಮೀ., d = 16 ಸೆಂ.ಮೀ., h = 35 ಸೆಂ. ಮೀ.

(37) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಗೋಳದ ಘನ ಪರಿಮಾಣ ಮತ್ತು ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(i) ½′, (ii) 2 ಮೀ. (iii) 30 ಸೆಂ.ಮೀ. (iv) 6 ಅಂಗುಲ. (v) 0·3 ಗಜ.

ಉತ್ತರಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 1

(1) 170, (2) 120, (3) 61 ಅಡಿ, (4) 2160, (5) 27, (6) 209, (7) 2640 ಗೂಟಗಳು, ರೂ. 3168, (8) 246 ಅಡಿ 8 ಅಂಗುಲ, (9) 240 ಗಜ, ರೂ. 5760, (10) 246 ರಾಡ್ 3 ಅಡಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2

(1) ಉದ್ದ = 1585 ಅಡಿ, ಅಗಲ = 15 ಅಡಿ, (2) 6 ಮೀ., (3) 121 ಗಜ, (4) 8 ಚ. ಮೀ., (5) 3 ಚ. ಅಡಿ, (6) 26·43 ಅಡಿಗಳು, (7) 1200 ಚ. ಅಡಿ, (8) $\frac{17}{24}$ ಚ. ಅಡಿ, (9) 3·44 ಚ. ಅಡಿ, (10) 16·37 ಚ. ಮೀ., (11) 44 ಮೀ., (12) 1·044 ಎಕರೆ, (13) 384 ಚ. ಮೀ., (14) 163·28 ಚ. ಅಂಗುಲ, (15) 12·56 ಚ. ಅಡಿ, (16) 2·18 ಚ. ಗಜ, (17) 740·0077 ಅಡಿಗಳು, (18) 10,000 ಚ. ಮೀ., (19) 98·125 ಚ. ಅಡಿ, (20) 37·68 ಚ. ಅಡಿ, (21) 54 ಎಕರೆ, ರೂ. 2,70,000.

ಅಭ್ಯಾಸ 3

(1) 259·81 ಚ. ಅಡಿ, (2) 120·71 ಚ. ಅಡಿ, (3) 99·84 ಚ. ಸೆಂ.ಮೀ., (4) ರೂ. 1,33,025 ಪೈ 28, (5) 46·48 ಚ. ಅಂಗುಲ, (6) 432 ಚ. ಮೀ., (7) 58·4 ಚ. ಮೀ., (8) 0·2783 ಎಕರೆ, (9) 41·5 ಚ. ಮೀ., (10) 0·3199 ಎಕರೆಗಳು.

	ಸಿಂಪ್ಸನ್ನನ ನಿಯಮದ ಪ್ರಕಾರ	ಟ್ರಾಪಿಜ್ಯ ನಿಯಮದ ಪ್ರಕಾರ
(11)	3855 ಚ. ಮೀ.	3788·25 ಚ. ಮೀ.
(12)	391·33 ಚ. ಮೀ.	410 ಚ. ಮೀ.
(13)	5·18 ಚ. ಮೀ.	5·16 ಚ. ಮೀ.
(14)	1298 ಚ. ಮೀ.	1302 ಚ. ಮೀ.
(15)	6·953 ಎಕರೆಗಳು.	7·119 ಎಕರೆಗಳು.
(16)	10·33 ಎಕರೆಗಳು.	10·85 ಎಕರೆಗಳು.

ಅಭ್ಯಾಸ 4

(1) 1·875 ಘ. ಅಡಿಗಳು, (2) 77 ಘ. ಅಡಿಗಳು, 13860 ಪೌಂ., (3) 6 ಅಡಿ, (4) 12960 ಘ. ಅಡಿಗಳು, (5) 6 ಅಂಗುಲ, (6) 28445, (7) 24·88 ಅಡಿಗಳು, (8) 92·19 ಘ. ಅಡಿಗಳು, (9) 183·27 ಚ. ಸೆಂ.ಮೀ., (10) 132·58 ಘ. ಅಡಿಗಳು, (11) 8·55 ಸೆಂ.ಮೀ., (12) 8·788 ಘ. ಅಡಿಗಳು, (13) 53·45 ಅಡಿಗಳು, (14) 528 ಘ. ಅಡಿಗಳು, (15) 12, 665·71 ಘ. ಸೆಂ.ಮೀ., (16) 2090 ಚ. ಸೆಂ.ಮೀ., (17) 10·18 ಘ. ಮೀ., (18) ಎತರ್ತ 2·98 ಮೀ., ವ್ಯಾಸ 74·5 ಸೆಂ.ಮೀ., (19) 380·286 ಘ. ಅಡಿಗಳು, (20) 3·18 ಸೆಂ.ಮೀ., (21) 2357·14 ಘ. ಅಡಿಗಳು, (22) 5324·8 ಸೆಂ.ಮೀ., (23) 392·857 ಘ. ಅಡಿಗಳು, (24) ರೂ. 754 ಪೈ 29, (25) 17164·19 ಘ. ಸೆಂ.ಮೀ., 3218·286 ಚ. ಸೆಂ.ಮೀ., (26) 17·026 ಘ. ಮೀ., (27) 125, (28) 37,33,333·33, (29) 0·29 ಸೆಂ.ಮೀ., (30) 6220 ಲೀ., (31) 1·8 ಮೀ., (32) 20 ಗಂ. 50 ನಿ.

(33) (i) 75 ಘ. ಸೆಂ.ಮೀ., 38 ಚ. ಸೆಂ.ಮೀ.
(ii) 9 ಘ. ಅಡಿ, 27 ಚ. ಅಡಿ.
(iii) 0·0075 ಘ. ಮೀ., 0·455 ಚ. ಮೀ.
(iv) 54 ಘ. ಅಂಗುಲ, 453 ಚ. ಅಂಗುಲ.
(v) 54 ಘ. ಅಡಿ, 237 ಚ. ಅಡಿ.

(34) (i) 868·21 ಚ. ಸೆಂ.ಮೀ., 1309·52 ಘ. ಸೆಂ.ಮೀ.
(ii) 197·901 ಚ. ಅಂಗುಲ, 441·93 ಘ. ಅಂಗುಲ.
(iii) 138·01 ಚ. ಅಡಿ, 44 ಘ. ಅಡಿ.
(iv) 532·82 ಚ. ಸೆಂ.ಮೀ., 530·29 ಘ. ಸೆಂ.ಮೀ.
(v) 40·07 ಚ. ಅಡಿ, 16·12 ಘ. ಅಡಿ.

(35) (i) 3·54 ಚ. ಅಡಿ, 0·39 ಘ. ಅಡಿ.
(ii) 1728·58 ಚ. ಸೆಂ.ಮೀ., 3928·57 ಘ. ಸೆಂ.ಮೀ.

(36) (i) 1·55 ಘ. ಮೀ., (ii) 756·64 ಘ. ಅಂಗುಲ, (iii) 13805 ಘ. ಸೆಂ.ಮೀ.

(37) (i) 0·5238 ಘ. ಅಡಿ, 3·14 ಚ. ಅಡಿ.
(ii) 33·52 ಘ. ಮೀ., 50·286 ಚ. ಮೀ.
(iii) 1,13,142·86 ಘ. ಸೆಂ.ಮೀ., 11,314·29 ಚ. ಸೆಂ.ಮೀ.
(iv) 905·14 ಘ. ಅಂಗುಲ, 452·57 ಚ. ಅಂಗುಲ.
(v) 3·05 ಘ. ಅಡಿ, 10·18 ಚ. ಅಡಿ.

ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಕೋಶ

ಅ

ಅಕ್ಷ	Axis
ಅಖಂಡ ಅನುಪಾತ	Continued Proportion
ಅಖಂಡ ಪ್ರಮಾಣ	Continued Ratio
ಅಡ್ಡಕೊಯ್ತ	Cross Section
ಅನಿಶ್ಚಿತ	Indeterminate
ಅನುಗುಣ	Corresponding
ಅನುಪಾತ	Proportion
ಅನುಪೂರಕ	Supplementary
ಅನುಮಿತ	Corollary
ಅನುಲೋಮ	Reciprocal
ಅನುವರ್ತ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆ	Conjugate complex number
ಅಪರಿಮೇಯ	Irrational
ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ	Factorisation
ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣ	Anti-clockwise
ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು	Opposite side
ಅವಕಾಶ	Interval
ಅವನತ ಕೋನ	Angle of depression
ಅವಾಸ್ತವ	Imaginery
ಅವಿಭಕ್ತ ಮಾರ್ಪು	Joint variation
ಅಸಮ ಪ್ರಮಾಣ	Unequal ratio
ಅಸಂಗತ ಪ್ರದರ್ಶನ	Reductio-ed-absurdum

ಆ

ಆದೇಶ ಕ್ರಮ	Method of substitution
ಆದ್ಯಂತಾನುಪಾತಿಗಳು	Extreme proportions
ಆಧಾರ	Base
ಆಯ, ಆಯಾಕೃತಿ	Rectangle
ಆವರ್ತಕಾಲ	Period

ಉ

ಉತ್ಪನ್ನ	Function
ಉನ್ನತಕೋನ	Angle of elevation
ಊಹ್ಯ, ಊಹೆ	Imaginary

ಋ

ಋಣ, ಋಣಾತ್ಮಕ	Negative

ಏ

ಏಕಮಾನ	Unit of measurement

ಐ

ಐಕ್ಯ	Coincide

ಅಂ

ಅಂತರ	Difference
ಅಂಶ	Numerator

ಕ

ಕರ್ಣ	Hypotenuse
ಕರಣಿ	Surd
ಕೋಟಿ	Abscissa
ಕ್ರಮಯೋಜನೆ	Permutation
ಕ್ರಮಾಪವರ್ತನ ಲಬ್ಧ	Pactorial of a numbe

ಖ

ಖಂಡಗಳು	Segments

ಗ

ಗಣಿತಾನುಮಿತಿ	Mathematical induction
ಗಹನ	Abstract
ಗುಣಾಂಕ	Coefficient
ಗೋಳಾಕೃತಿ	Sphere

ಘ

ಘನ	Cube
ಘನ ಪರಿಮಾಣ	Volume
ಘನವಸ್ತು	Solid
ಘಾತ	Index

ಚ

ಚತುರ್ಥ ಭಾಗ	Quadrant
ಚತುರ್ಭುಜ	Quadrilateral
ಚತುರ್ಥಾನುಪಾತ	Fourth proportional
ಚೌಕಾಕೃತಿ	Square

ಛ

ಛೇದ — Denominator
ಛೇದಕ — Secant

ಜ

ಜನಕ ರೇಖೆ — Generator
ಜ್ಯಾ — Chord

ತ

ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ — Trapezium
ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಫಲನ — Trigonometric function
ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣ — Trigonometric ratios
ತ್ರಿಜ್ಯ — Radius
ತ್ರಿಭುಜ — Triangle
ತೃತೀಯಾನುಪಾತಿ — Third proportional

ದ

ದಶಮಾಂಶ — Decimal, Mantissa
ದ್ವಿಘಾತಿಸು — Square
ದ್ವಿಪದ ಪ್ರಮೇಯ — Binomial *Theorem*
ಧನ, ಧನಾತ್ಮಕ — Positive

ನ

ನಿಯತಾಂಕ, ನಿಯತಪದ — Constant

ಪ

ಪರಿಣಮನ — Variaticn
ಪರಿಪೂರಕ — Supplementary
ಪರಿಭ್ರಮಿಸು — Revolve
ಪರಿಮೇಯ — Rational
ಪರಿಮೇಯಕಾರಕ ಅಪವರ್ತನಗಳು — Rationalising factors
ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹು — Adjacent side
ಪೂರ್ಣವರ್ಗ — Perfect square
ಪೂರ್ಣಾಂಕ — Integer
ಪ್ರವಣತೆ — Inclination
ಪೂರಕ ಕೋನ — Complementary angle
ಪೃಷ್ಠ — Frustum
ಪ್ರದಕ್ಷಿಣ — Clockwise
ಪ್ರಮಾಣ — Ratio
ಪ್ರಸ್ತರಣ — Permutation

ಬ

ಬಹುಪದಿ — Polynomial
ಬಾಗು — Inclination
ಬಾಹು — Side
ಭಾಗಲಬ್ಧ — *Quotient*
ಭಿನ್ನರಾಶಿ — Derivative Fraction
ಭುಜ — Ordinate, side

ಮ

ಮಧ್ಯಾನುಪಾತಿ — Mean propor_tional
ಮಾರ್ಪು — Variation
ಮಿಶ್ರಕೋನ — Compound angle
ಮೂಲಬಿಂದು — *Origin*
ಮೇರೆ — Boundary

ರ

ರೇಖಾಚಿತ್ರ — Graph

ಲ

ಲಕ್ಷಣಾಂಶ — Characteristic
ಲಘುಕೋನ — Acute angle
ಲಘುಗಣಕ — Logarithems
ಲಘುಗಣಾಂಕ — Common logorithems
ಲಂಬ — Perpendicular
ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ — Right ang'ed triange

ವ

ವರ್ಗಪೂರಣ — Squaring
ವರ್ಗಮೂಲ — Square root

ವರ್ಗಸಮೀಕರಣ	Quadratic equation
ವರ್ತುಲೀಯ	Circular
ವಿಕರಣ	Rationalise
ವಿಕರಣೀಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು	Rationalising factors
ವಿಪರ್ಯ	Reciprocal
ವಿರುದ್ಧ ಲಘುಗಣಕಗಳು	Anti-logarithems
ವಿಲೋಮ ಮಾರ್ಪು	Inverse variation
ವೃತ್ತಖಂಡ	Arc
ವ್ಯಾಸ	Diameter
ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ	Reciprocal

ಶ

ಶತಾಂಶ	Centesimal
ಶೋಧಕ	Discriminant
ಶಂಕು	Cone
ಶೃಂಗ, ಶೃಂಗಬಿಂದು	Vertex

ಷ

ಷಷ್ಟ್ಯಂಶ	Sexagesimal

ಸ

ಸಜಾತೀಯ	Same kind
ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ	Right angled triangle
ಸಮತಲ	Plane
ಸಮಪ್ರಮಾಣ	Equal ratio
ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜ	Similar triangles
ಸಮಾನಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ	Equilateral triangle
ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ	Parallelogram
ಸಮೀಕರಣ	Equation
ಸರಳಮಾರ್ಪು	Direct variation
ಸಹಜ ಲಘುಗಣಕ	Natural logaritehm
ಸಾಮಾನ್ಯ ಭಿನ್ನರಾಶಿ	Common fraction
ಸಹಗಾಮಿ	Corresponding
ಸುತ್ತಳತೆ	Perimeter
ಸೂಚಕಗಳು	Co-ordinates
ಸಂಜ್ಞಾನ ಸೂತ್ರ	Formula
ಸಂಪೂರಕ	Supplementary
ಸಂಯೋಜನೆ	Combination
ಸಂವೃತ್ತ ಬಿಂದುಗಳು	Concyclic
ಸ್ಥಿರ	Constant

ಕ್ಷ

ಕ್ಷೇತ್ರಗಣಿತ	Mensuration
ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ	Area

ತಪ್ಪೋಲೆ ಒಪ್ಪೋಲೆ

ಪುಟ	ಸಾಲು	ತಪ್ಪು	ಒಪ್ಪು
16	16	$\lambda(25)^{\frac{1}{2}}$	$(25)^{\frac{1}{4}}$
24	20	$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}} =$	$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}+a\sqrt{+1}}$
30	19	$\sqrt[5]{96}+3\sqrt[5]{3+}$	$\sqrt[5]{96}+3.\sqrt[5]{3}$
34	14	$\log_a 3,\ \log_a 2$	$\log_a 3 - \log_a 2$
45	3	$\frac{667.571 \times \sqrt{2161}}{121 \cdot 73}$	$\frac{667.571 \times \sqrt{2.161}}{121.73}$
	16	$10^x + 10 - x = \frac{5}{}$	$10^x + 10^{-x} = \frac{5}{2}$
	(iv)	$10^{x+2}.100^{x+2} = 50$	$10^{x+2} \cdot 100^{x+3} = 50$
84	16	$\alpha x^2 - \beta x + \beta$	$\alpha x^2 - \beta x + \beta = 0$
96	1	${}^9c_3\ {}^9c_4$	${}^9c_2,\ {}^9c_4$
103	14	5_{t^4}	$5/t^4$
	15	$\frac{1}{2^2 b^3}$	$\frac{1}{2^3 b^3}$
133	24	BC PC	$\frac{BC}{PC}$
145	8	y ಪದವು $(\sin x)$	$y\ (\sin x)$ ಪದವು
149	23	$y \quad 2 \cos x$	$y = 2 \cos x$
162	17	$\cos B \sin (-B)$	$\cos B,\ \sin (-B)$
163	11	$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - in^2 \theta$	$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$

ಆಧಾರಗ್ರಂಥಗಳ ಪಟ್ಟಿ

1. DESHAPANDE, S. P., M.Sc.; *Mathematics for Polytechnic Students.* Poona: A. V. G. Prakashan, 1966.
2. GUPTA, H. C., Ph.D. (AGRA), Ph.D. (MANCHESTER); *Mensuration of Solids for Intermediate Students.* Allahabad: Pottushale (Private) Ltd., 1958.
3. LONEY, S. L., M.A.; *Plane Trigonometery, Part I.* London-Bombay-Calcutta-Madras: Macmillan and Company Limited, 1965.
4. MAYNE, A. B., M.A.; *Essentials of Schools Algebra.* London: Macmillan and Company Limited, 1965.
5. PIERPOIONT, A. E., M.Sc.: *Mensuration for Indian Schools and Colleges.* Bombay–Calcutta–Madras–New Delhi : Orient Longman's, 1964.
6. ROSS, P., M.A., B.Sc.: *Elementary Algebra, Part II with answers.* Bombay–Calcutta–Madras–New Delhi: Orient Longman's, 1963.
7. *A Manual in Mathematics, Volumes I and II.* Bangalore : Department of Mathematics, University of Agricultural Sciences, 1971.
8. *Pre-University Mathematics, Part I and Part II.* Bangalore University Publication, 1968.
9. ಅಮೂರ, ಕೆ. ಎಸ್., ಮಲಘಾಣ, ಎಸ್. ಆರ್., ಗೋಖಲೆ. ಎಸ್. ಬಿ. ಮತ್ತು ಅಯ್ಯಂಗಾರ್, ಎಸ್. ವಿ. ಎಸ್., **ಬೀಜಗಣಿತ–ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ ಪರಿಚಯ.** ಧಾರವಾಡ : ಕರ್ನಾಟಕ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ, 1961.
10. ದೊರೆಸ್ವಾಮಿ, ವಿ. ಕೆ., ಎಂ.ಎಸ್‌ಸಿ., ಬಿ.ಎಲ್.; **ಪ್ರೀಯೂನಿವರ್ಸಿಟಿ ಬೀಜಗಣಿತ.** ಮೈಸೂರು : ಪ್ರಸಾರಾಂಗ, ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ, 1971.
11. ಪ್ರಾಣೇಶರಾವ್, ಪಿ. ಆರ್. ; **ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿ.** ಮೈಸೂರು : ಪ್ರಸಾರಾಂಗ ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ, 1961.

12. ಪ್ರಾಣೇಶರಾವ್, ಪಿ. ಆರ್. ; **ಬೀಜಗಣಿತ.** ಮೈಸೂರು : ಮೈಸೂರು ವಿಶ ವಿದ್ಯಾನಿಲಯ, 1958.

13. ಮಂಜುನಾಥಯ್ಯ. ಕೆ. ಎಸ್. ; **ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತ.** ಮೈಸೂರು : ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ, 1957.

ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಪ್ರಕಟಣೆಗಳು

			ರೂ: ಪೈ
1.	ಸುಭಿಕ್ಷತೆಗೆ ತೆರೆದ ಬಾಗಿಲು	(ಪ್ರತಿಗಳು ತೀರಿವೆ)	1+50
2.	ಪೀಡೆ ನಿರ್ವಹಣೆ	(,,)	3–75
3.	ಕೀಟ ವಿಂಗಡಣೆ	(,,)	12–00
4.	ಮೈಸೂರು ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಕೃಷಿ	(,,)	10–00
5.	ತರಕಾರಿ ಬೇಸಾಯ	(,,)	10–00
6.	ಕೀಟ ಹತೋಟಿ	(ದ್ವಿತೀಯ ಮುದ್ರಣ)	10–00
7.	ಕೃಷಿ ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರಶಬ್ದಾರ್ಥ ನಿರೂಪಣಾವಳಿ	ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ	3–75
		ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ	5–00
8.	ಮಣ್ಣು ಮತ್ತು ನೀರು ಸಂರಕ್ಷಣಾ ಕೈಪಿಡಿ	ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ	12–00
		ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ	15–00
9.	ರೈತರ ನೆಚ್ಚುಮೆಚ್ಚಿನ ಮರಗಳು	ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ	12–00
		ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ	15–00
10.	ಸಾಕುಪ್ರಾಣಿಗಳ ಶರೀರ ಕ್ರಿಯಾಶಾಸ್ತ್ರ—ಭಾಗ 1		5–00
11.	ಸಾಕುಪ್ರಾಣಿಗಳ ಶರೀರ ಕ್ರಿಯಾಶಾಸ್ತ್ರ—ಭಾಗ 2	ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ	9–00
		ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ	12–00
12.	ಸಾಕುಪ್ರಾಣಿಗಳ ಶರೀರ ಕ್ರಿಯಾಶಾಸ್ತ್ರ—ಭಾಗ 3	ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ	8–00
		ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ	12–00
13.	ಮಣ್ಣು ಮತ್ತು ನೀರು ನಿರ್ವಹಣೆ	ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ	12–00
		ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ	15–00
14.	ಮಣ್ಣು	ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ	9–00
		ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ	12–00
15.	ಕೃಷಿ ಸಹಕಾರ	ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ	5–00
		ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ	8–00
16.	ಕಳೆಗಳು ಮತ್ತು ಕಳೆಗಳ ನಿಯಂತ್ರಣ	ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ	12–00
		ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ	15–00
17.	ಗೋಸಂಪತ್ತು	ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ	5–00
		ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ	8–00
18.	ಧಾನ್ಯದಾಸ್ತಾನು ತತ್ವ ಮತ್ತು ಪದ್ಧತಿಗಳು	ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ	6–00
		ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ	9–00

			ರೂ. ಪೈ.
19.	ಮಣ್ಣಿನ ಫಲವತ್ತತೆ ಹಾಗೂ ಉತ್ಪಾದನೆ	ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ	14–00
		ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ	17–00
20.	ಪಶು ವೈದ್ಯಕೀಯ ವಿಜ್ಞಾನ	ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ	6–00
		ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ	9–00
21.	ಹೊಲದ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೆಲವು ಕೀಟಗಳು	ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ	6–50
		ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ	9–50
22.	ಟ್ರ್ಯಾಕ್ಟರು ಹಾಗೂ ಟ್ರ್ಯಾಕ್ಟರುಗಳನ್ನು ಸುಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿಡುವ ಕ್ರಮಗಳು	ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ	6–00
		ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ	10–00
23.	ಕೃಷಿ ವಿಸ್ತರಣ ಶಿಕ್ಷಣ ಪದ್ಧತಿಗಳು	ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ	9–00
		ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ	13–00
24.	ಕಣಜದ ಪೀಡೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ	12–00
		ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ	15–00
25.	ಸಸ್ಯ ವರ್ಗೀಕರಣಶಾಸ್ತ್ರ	ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ	12–00
		ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ	16–00
26.	ಪೌಷ್ಟಿಕ ಆಹಾರ	ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ	7–00
		ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ	11–00
27.	ಕಡಲ ಮೀನುಗಾರಿಕೆ	ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ	4–00
		ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ	8–00
28.	ಧಾನ್ಯದ ಬೆಳೆಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ		8–50
29.	ಕಬ್ಬಿನ ಬೆಳೆಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ		3–50
30.	ಶಿಶುವಿಹಾರ	ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ	7–50
		ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ	10–50
31.	ಬೇಳೆಕಾಳು ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ		6–00
32.	ಕೃಷಿ ಎಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ	ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ	7–50
		ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ	11–00
33.	ಇಲಿಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ನಿಯಂತ್ರಣ	ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ	7–50
		ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ	11–50
34.	ತರಕಾರಿ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ		10–00
35.	ಹಣ್ಣಿನ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ		13–00

			ರೂ. ಪೈ.
36.	'ಕ್ಯಾನಿಂಗ' ಆಹಾರ ಜೋಪಾನೆಯ ಒಂದು ವಿಧಾನ	ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ	13–00
		ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ	17–00
37.	ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರವೇಶಿಕೆ—ಭಾಗ 1		

ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿವೆ

38. ಅಲಂಕಾರ ಸಸ್ಯಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ
39. ಜೀವಕೋಶ ಕ್ರಿಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಹಾಗೂ ಜೀವರಸಾಯನ ಶಾಸ್ತ್ರ
40. ಎಲುಬು ಶಾಸ್ತ್ರ
41. ಗ್ರಾಮೀಣ ರೈತ ಯುವಕ ಸಂಘಗಳ ಸಂಘಟನೆ